

MASARYKOVA UNIVERZITA

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra fyziky, chemie a odborného vzdělávání



**Matematika jako nástroj fyziky ve vybraných
fyzikálních zákonech**

Bakalářská práce

Brno 2015

Vedoucí bakalářské práce:

Prof. RNDr. Vladislav Navrátil, CSc.

Vypracovala:

Lucie Krézková

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně a použila jen prameny uvedené v seznamu literatury. Souhlasím, aby práce byla uložena na Masarykově univerzitě v Brně v knihovně Pedagogické fakulty a zpřístupněna ke studijním účelům.

V Brně dne 24. 3. 2015

.....

Poděkování

Tímto bych chtěla velmi poděkovat panu prof. RNDr. Vladislavu Navrátilovi za jeho vedení, ochotu, cenné připomínky, úsměv na tváři a nesmírnou, nesmírnou trpělivost.

Mámě a tátovi za podporu, sestře za humor i v těch vypjatějších chvílkách psaní této práce a Jardovi za starostlivost a „hnací sílu“ do její realizace.

Abstrakt

Obsahem této bakalářské práce je výklad a vysvětlení některých základních matematických definic a vět z oblasti základů vektorové analýzy, které jsou úzce svázány se studiem fyziky, a jejich následné propojení a aplikace na vybrané fyzikální zákony newtonovské mechaniky. Snažila jsem zvolit přístupnou cestu svého výkladu jakožto posluchačky 3. ročníku oboru „Pedagogické asistentství matematiky a fyziky pro ZŠ“ pro pochopení daných témat, ale zároveň i neelementární úroveň probírané látky tak, aby si přišli na své i zapálenější zájemci o matematiku a fyziku.

Na základě této práce bych chtěla přispět ke komplexnějšímu pochopení vztahu mezi matematikou a fyzikou, seznámit čtenáře s vybranými fyzikálními zákony pomocí objasněných matematických „nástrojů“ a prostřednictvím příkladů a co možná nejlidštějšího vysvětlení předat alespoň intuitivní fyzikální nádech, který jim může otevřít onu bránu kouzel fyziky.

Abstract

This Bachelor's thesis deals with the interpretation and explanation of some basic mathematical definitions and theorems of the fundamentals of vector analysis, which are closely tied to the study of physics and their connections and applications to selected physical laws of Newtonian mechanics. I tried to choose an accessible path of interpretation from the view of me as a listener in the 3rd year of study "Teacher Training in Mathematics and Physics for Elementary Schools" for the understanding of the topics and I also choosed non-elementary level of this topic for people who are interested in mathematics and physics.

Based on this work, I wanted to contribute to a more comprehensive understanding of the relationship between mathematics and physics, to acquaint the reader with selected physical laws solved by using mathematical "tools" and to give intuitive physical touch at least to readers through examples and explanations, so they can open „a magic gate“ of physics.

Klíčová slova

vektory ve fyzice, skalární součin, vektorový součin, Newtonovy pohybové zákony, newtonovská mechanika

Key words

vectors in physics, dot product, cross product, Newton's laws of motion, Newtonian mechanics

Obsah

1	ÚVOD	8
2	ZÁKLADY VEKTOROVÉ ANALÝZY jakožto nástroj pro základní fyzikální interpretace.....	10
2.1	Fyzikální motivace	10
2.2	Historie	11
2.3	Matematické nástroje vektorové analýzy	11
2.3.1	Pojem vektor	11
2.3.2	Součet vektorů, násobek vektoru reálným číslem	16
2.3.3	Vyjádření vektoru v různých souřadnicových systémech	19
2.3.4	Lineární kombinace vektorů	22
2.3.5	Skalární součin	25
2.3.6	Soustavy lineárních rovnic	37
2.3.7	Krátká prohlídka matic	41
2.3.8	Zavedení determinantu	43
2.3.9	Vektorový součin	49
3	FYZIKÁLNÍ APLIKACE ZÁKLADŮ VEKTOROVÉHO POČTU	53
3.1	Některé základní fyzikální vektory	53
3.1.1	Newtonův zákon setrvačnosti alias Vektor síly a zrychlení	53
3.1.2	Vektor normálové tlakové síly	55
3.1.3	Vektor tahové síly vlákna	55
3.1.4	Vektor třecí síly	55
3.2	Poloha hmotného bodu v souřadném systému	56
3.2.1	Polohový vektor	56
3.2.2	Polohový vektor hmotného bodu v pohybu	57
3.3	Násobení vektoru reálným číslem	59
3.3.1	II. Newtonův pohybový zákon	60
3.3.2	Hybnost tělesa	61
3.3.3	Archimédův zákon	62
3.3.4	Stokesův vztah pro odpor prostředí	63
3.3.5	Klidové (statické) tření	63
3.3.6	Amontónův–Coulombův zákon pro smykové tření	64

3.3.7	III. Newtonův pohybový zákon.....	64
3.4	Užití jednotkového vektoru.....	65
3.4.1	Newtonův gravitační zákon.....	65
3.4.2	Coulombův zákon	68
3.5	Skládání (superpozice) vektorů.....	70
3.5.1	Vektor relativní rychlosti	70
3.5.2	Součet sil – silový diagram	70
3.5.3	Součet dvou sil – vodorovná položka	71
3.5.4	Tíhová síla – součet sil v neinerciální vztažné soustavě	72
3.5.5	Rozklad polohového vektoru	73
3.5.6	Rozklad sil – nakloněná rovina	74
3.6	Skalární součin	75
3.6.1	Práce.....	75
3.6.2	Výkon práce	76
3.7	Vektorový součin	76
3.7.1	Pohyb po kružnici	77
3.7.2	Moment síly	79
3.7.3	Coriolisova síla.....	80
4	ZÁVĚR	82
5	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	83
6	SEZNAM INTERNETOVÝCH ZDROJŮ	84
7	CITACE OBRÁZKŮ	85

1 ÚVOD

Fyzika – nemálo studentům se při přečtení či vyřknutí tohoto slova vybaví nezáživné hodiny plné vzorečků, počítání a otravných laboratorních prací. Přitom se jedná o popis dokonalých přírodních jevů, se kterými se setkáváme každý den. Elegance a půvab tohoto popisu spočívá v jeho matematizaci – nemálokrát se v historii fyziky stalo, že právě matematika stála za zrodem nových fyzikálních teorií, a tak dala impuls k dalšímu rozvoji představ o světě kolem nás. A zase naopak, k pochopení a popisu těchto dějů a stavů soustav bychom nemohli dojít bez znalostí matematických prostředků, oněch „nástrojů“, kterými se mimo jiné zabývá tato bakalářská práce. Proto se tyto dvě disciplíny doplňují natolik, že jedna bez druhé jednoduše nedokáže existovat.

S nadsázkou řečeno, matematika svým způsobem „předpovídá budoucnost“ – a to je přece veliké lákadlo zasvětit se do jejích tajů. Tato bakalářská práce odkrývá řadu matematických definic a vět z oblasti vektorové algebry a jejich aplikace do vybraných fyzikálních zákonů. Děje se tak na základě vysvětlení těchto definic pomocí opakování toho, co by měl čtenář znát, a vzápětí rozšíření těchto matematických prostředků do obecnějšího, vysokoškolského rozměru. Potom je tento matematický prostředek – „nástroj“ – uchopen a přímo aplikován na konkrétní fyzikální zákony, které jsou opět popsány tak, aby čtenář si problematiku osvojil a pochopil. K tomu jsem volila řadu přirovnání z běžného života a snažila se tak dostat Komenského principu učení „od jednoduchého ke složitému, od známého k neznámému“.

Práce je tematicky rozdělena do dvou kapitol – první je věnována matematické části a druhá její fyzikální aplikaci. Obě tyto části jsou dále členěny do podkapitol a ty následně dále. Zvolila jsem tříúrovňový formát nadpisů a pro přehlednost jsem důležité poznatky (definice, věty) vložila do ohraničeného textového pole. Pro názornost nechybí obrázky, vyjma jednoho jsem všechny vytvořila v programu systému Windows Malování, proto je citace obrázku uvedena pouze jedna.

Matematická část začíná fyzikální motivací, tedy cílem, ke kterému spěje celá tato první část. Dále je čtenář seznámen s krátkou historií matematických aparátů, které se v práci objevují. Poté následuje vlastní polovina tématu bakalářské práce – nástroje vektorového počtu. Dotkla jsem se především objasnění pojmu vektoru v rámci matematiky a fyziky, operací s nimi, aby vše vyvrcholilo kapitolou „Vektorový součin“. Přitom jsem se snažila docílit co nejplynulejšího navazování mezi kapitolami. Řadu poznatků v podobě definic a vět jsem záhy svými slovy vysvětlila a okomentovala. Logické členění vychází od známých poznatků („středoškolských“) po ty „vysokoškolské“.

Druhá část čtenáře přímo seznamuje s fyzikální aplikací objasněných matematických poznatků v oblasti především newtonovské mechaniky, zejména pak objasněním Newtonových pohybových zákonů a jejich aplikací. Každý příklad matematické aplikace do vybraných fyzikálních zákonů je opět komentován příklady a přirovnáními.

V práci jsem vycházela z předpokladu znalosti středoškolské fyziky a matematiky.

Celá bakalářská práce je vystavěna na systému „pyramidy“ – snažila jsem se postupovat od objasňování dílčích matematických „nástrojů“ tak, aby jeden navazoval na druhý, jejichž „vrcholem“ je potom objasnění vektorového součinu v prostoru obecné dimenze.

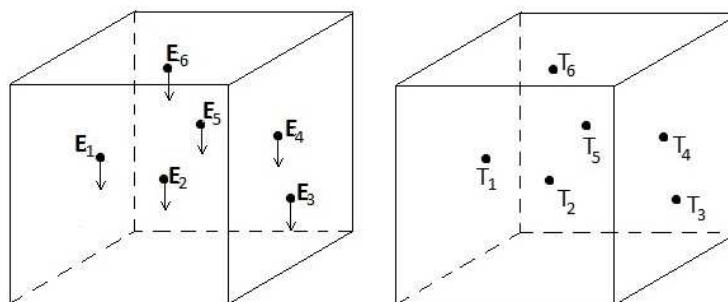
Mým cílem bylo provázat matematiku s fyzikou tak, aby čtenář získal alespoň intuitivní představu o matematizaci fyziky. Chtěla jsem poukázat na důležitost matematiky ve studiu fyziky a zároveň objasnit matematické definice tak, „aby si na ně mohl člověk sáhnout“. Náznými ukázkami, logickým členěním a návazností témat bych chtěla didakticky rozšířit fyzikální obzory a motivovat posluchače matematiky a fyziky na středních školách a všechny zainteresované fyzikální matematiky.

Připomínám, že komentáře k pochopení obsahu témat uvádím ze SVÉHO pohledu posluchačky 3. ročníku výše uvedeného studijního programu.

2 ZÁKLADY VEKTOROVÉ ANALÝZY

jakožto nástroj pro základní fyzikální interpretace

S vektory jsme se seznámili již na základní škole – tzv. orientované úsečky v nějaké kartézské souřadné soustavě. Vektory ve fyzice připisujeme takovým fyzikálním veličinám, které jsou charakterizovány jejich jednotkou, číselnou hodnotou a nějakým směrem (síla, intenzita, rychlost, zrychlení...), oproti tomu skalární fyzikální veličiny mají pouze číselnou hodnotu (čas, teplota, objem, délka...) a jednotku. Takto v prostoru rozlišujeme vektorové nebo skalární pole – jedná se o funkce, kdy každému bodu v prostoru je přiřazen vektor nebo skalár (viz obr. 1).



Obr. 1: Vektorové pole intenzit gravitačního pole Země a skalární pole teplot v týchž bodech prostoru

V následujících odstavcích si postupně zopakujeme základní středoškolské pojmy jako vektory a operace s nimi a následně je rozšíříme do vysokoškolské dimenze. Jejich návazností směřujeme k pochopení a definici vektorového součinu, jakožto „nejzákladnějšího základu“ v teorii fyziky.

2.1 Fyzikální motivace

Auto rozjíždějící se do kopce, volný pád parašutisty, rotace Zeměkoule – pokud chceme matematicky obsáhnout a popsat děje a stavy soustav probíhající kolem nás, zjistíme, že na skalární hodnoty příslušejícím těmto dějům (např. auto má rychlost 50 km/h) je někdy možné nahlédnout z pohledu jejich směru, tedy z jakéhosi rozšířenějšího hlediska. To nám umožňuje výhodně pracovat vektory, které popisují tyto děje nejen

nějakou číselnou hodnotu, ale i orientací v prostoru. Pochopení matematické podstaty této oblasti otvírá bránu k pochopení principů přírody.

2.2 Historie

Matematický obor vektorová (lineární) algebra spadá do 19. století a je spojena se jmény jako W. R. Hamilton, A. Cayley (teorie matic) či H. Grassmann. Ruku v ruce jde s poznatky z geometrie a s pojmy jako afinní geometrie (počátky v 18. století), afinní a vektorové prostory. Pojem kartézské soustavy souřadnic R. Descarta (1. pol. 17. století) je nezbytnou charakterizací dvou a třírozměrného prostoru, který je nám tolik známý z každodenního života. Jako velmi důležitý shledávám přínos G. Cantora a R. Dedekinda (až kolem roku 1872), kdy tito pánové „vynalezli“ osu reálných čísel tak, jak ji známe z počátků naší povinné školní docházky. Tím propojili dosud známou geometrii s algebrou, a tak dali vzniknout měření vzdáleností, bez které bychom si jistě neuměli počítání představit. [2]

První zmínka o vektorech ve fyzice se objevila v roce 1586 ve spisu holandského renesančního myslitele a fyzika Simona Stevina „Princip rovnováhy“, zde je použit termín „rozklad síly“, vektorově vzato první provedení rozkladu vektoru do jeho složek. A to je fantastický poznatek – Simon Stevin vlastně přišel na to, že síly se chovají jako vektory. Vektory jako takové do fyziky zavádí v 18. století Leonhard Euler.

2.3 Matematické nástroje vektorové analýzy

2.3.1 Pojem vektor

Následující definici vektoru dobře známe ze střední školy. Předpokládáme znalost znázornění kartézského souřadnicového systému a geometrických základů. Značení vektorů odpovídá ustáleným konvencím:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = [b_1, b_2, \dots, b_n] - [a_1, a_2, \dots, a_n] = \\ &= (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n)\end{aligned}$$

značí vektor $\mathbf{u}$ jakožto **orientovanou úsečku** $\overrightarrow{AB}$ mezi body A o souřadnicích $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ a $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ a jeho souřadnice $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ v nějakém souřadném systému n -rozměrného prostoru (podrobněji v kap. 2.3.3 a 2.3.4), budeme pracovat především s kartézským souřadnicovým systémem.

Definice kartézského součinu

Nechť jsou dány množiny A , B . Kartézským součinem $A \times B$ nazveme množinu všech uspořádaných dvojic (x, y) , kde $x \in A$ a $y \in B$ jsou libovolné prvky. Zapisujeme:

$$A \times B = \{(x, y): x \in A \wedge y \in B\}$$

Pozn.: Slovo „kartézský“ pochází od původce tohoto součinu Reného Descarta (1596-1650).

Pozn.: Protože jde o uspořádané dvojice, tedy dvojice, ve kterých závisí na pořadí, je rozdíl mezi kartézským součinem $A \times B$ a $B \times A$, obecně tedy kartézský součin není komutativní.

Uvedme praktický příklad: mějme množinu $A = \{1, 2, 3\}$ a množinu $B = \{0, 4\}$. Kartézským součinem těchto množin je tedy množina $A \times B = \{(1, 0), (1, 4), (2, 0), (2, 4), (3, 0), (3, 4)\}$.

Kartézským čtvercem množiny A by tedy byla množina $A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

Podle definice vidíme, že kartézský souřadný systém, který dobře známe, je speciálním případem kartézského čtverce. Rovinu, tedy množinu uspořádaných dvojic reálných čísel, tak budeme značit jako $\mathbb{R}^2$.

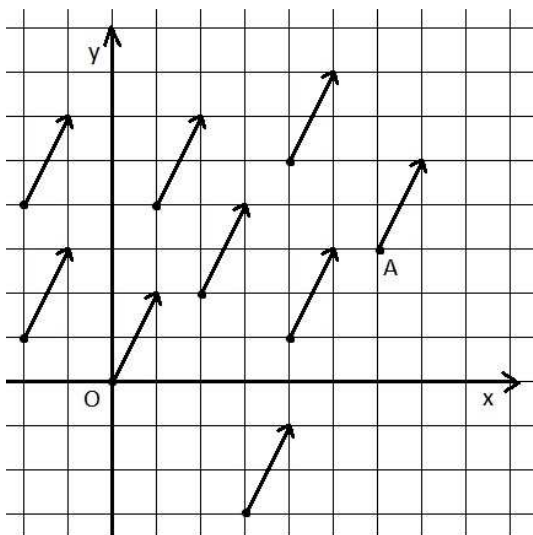
Pokud bychom chtěli předchozí příklad kartézského součinu $A \times B$ znázornit v rovině, jistě si představíme, že se jedná o množinu 6 bodů se souřadnicemi $[1; 0]$, $[1; 4]$, ...

Analogicky by se definoval kartézský součin n množin jakožto množina uspořádaných n -tic. Jeho zástupcem je nám známý prostor $\mathbb{R}^3$, obecně $\mathbb{R}^n$. Mocninu těchto prostorů nazýváme jejich dimenze.

Středoškolská definice vektoru

Nenulový vektor je množina všech orientovaných úseček, které mají stejný směr a stejnou velikost. **Nulový vektor** je množina všech nulových orientovaných úseček, tedy takových úseček, kdy jejich počáteční bod splývá s koncovým bodem. Označujeme jej **$\mathbf{o}$** . **Volný vektor** je takový, který není vázán k nějakému bodu v prostoru. Tvoří tedy množinu vektorů. **Vázaný vektor** je spojen s určitým bodem v prostoru.

Z uvedeného vyplývá, že volný vektor je dán pouze svou velikostí a směrem, může se tedy v prostoru posunovat, zatímco vázaný vektor je pevně spojen s bodem v nějaké vztažné (zde kartézské) soustavě souřadnic.



Obr. 2: Množina volných vektorů a jeden vázaný vektor s počátkem v bodě A

Pozn.: Přirozeně uvažujme, že síť je tvořena jednotkovými čtverci, pak tyto volné vektory na obr. 2 mají souřadnice $(1, 2)$.

Z obr. 2 je krásně vidět, že přímky určené těmito vektory jsou rovnoběžné, tedy všechny vektory, které je určují, mají stejný směr (jsou lineárně závislé (viz níže)).

Vysokoškolská definice vektoru nahlíží na vektor obecněji, zahrnuje jej do tzv. vektorového (lineárního) prostoru. Ačkoliv zní toto slovní spojení poněkud nadneseně, ve výsledku se jedná o definici, která prvkům vektorového prostoru (vektorům) přiřazuje vlastnosti, díky kterým se „chovají hezky“ tak, jak známe ze SŠ (viz operace s vektory níže). Pro naše účely postačí konkrétnější formulace nad tělesem reálných čísel (skalárů).

Slovo „*těleso*“ je termín používaný v teorii množin a algebraických struktur. Jedná se o obecnou číselnou množinu s operacemi násobení a sčítání, která splňuje nějaké požadavky. My se budeme setkávat povětšinou s tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$, které velmi dobře známe, definici algebraického tělesa tak necháme ladem a vystačíme si se základní představou, kterou jsme o této množině získávali v průběhu ZŠ, SŠ a vlastně celé doby našeho rozumového uvažování.

Vysokoškolská definice vektorového prostoru

Nechť je dána neprázdná množina V , jejíž prvky nazýváme vektory, a těleso reálných čísel (skalárů) $T = \mathbb{R}$. Zavedme ve V dvě zobrazení (operace):

1. Zobrazení $\oplus: V \times V \rightarrow V$, které nazveme sčítání vektorů.
2. Zobrazení $\odot: T \times V \rightarrow V$, které nazveme násobení vektoru skalárem.

Řekneme, že V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ s danými vektorovými operacemi $\oplus$ a $\odot$, právě tehdy, když pro $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a $\forall t, s \in \mathbb{R}$ platí následující axiomy:

- $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$... komutativní zákon pro sčítání vektorů
- $\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w}$... asociativní zákon pro sčítání vektorů
- $\forall \mathbf{u} \in V \exists \mathbf{0} \in V: \mathbf{u} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{u}$... existence nulového prvku (nulového vektoru)
- $\forall \mathbf{u} \in V \exists \mathbf{v} \in V: \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{0}$... existence inverzního prvku (opačného vektoru)
- $t \odot (s \odot \mathbf{u}) = (ts) \odot \mathbf{u}$... asociativní zákon pro násobení skalárem
- $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$... jednotkový prvek pro násobení vektoru skalárem
- $(t + s) \odot \mathbf{u} = (t \odot \mathbf{u}) \oplus (s \odot \mathbf{u})$... distributivita vzhledem ke sčítání

[10]

Pozn.: Obecnější verze definice platí pro libovolné číselné těleso s operacemi sčítání a násobení $(T, +, \cdot)$, tedy i množinu komplexních čísel $\mathbb{C}$.

Ohledně značení – nulový vektor se obvykle značí $\mathbf{0}$ a opačný vektor k libovolnému vektoru $\mathbf{u}$ jako $-\mathbf{u}$.

Přímo z definice vektorového prostoru platí pravidla pro počítání s vektory, která známe. To nám umožňuje vyřknout následující větu.

Věta o základních pravidlech počítání s vektory

Mějme vektorový prostor V s libovolnými vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ nad tělesem $\mathbb{R}$ s libovolnými skaláry $s, t \in \mathbb{R}$. Platí:

- $t \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = t \cdot \mathbf{u} - t \cdot \mathbf{v}$
- $(t - s) \cdot \mathbf{u} = t \cdot \mathbf{u} - s \cdot \mathbf{u}$
- $t \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow t = 0 \vee \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- $t \cdot (-\mathbf{u}) = (-t) \cdot \mathbf{u} = -(t \cdot \mathbf{u})$, speciálně pak $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$

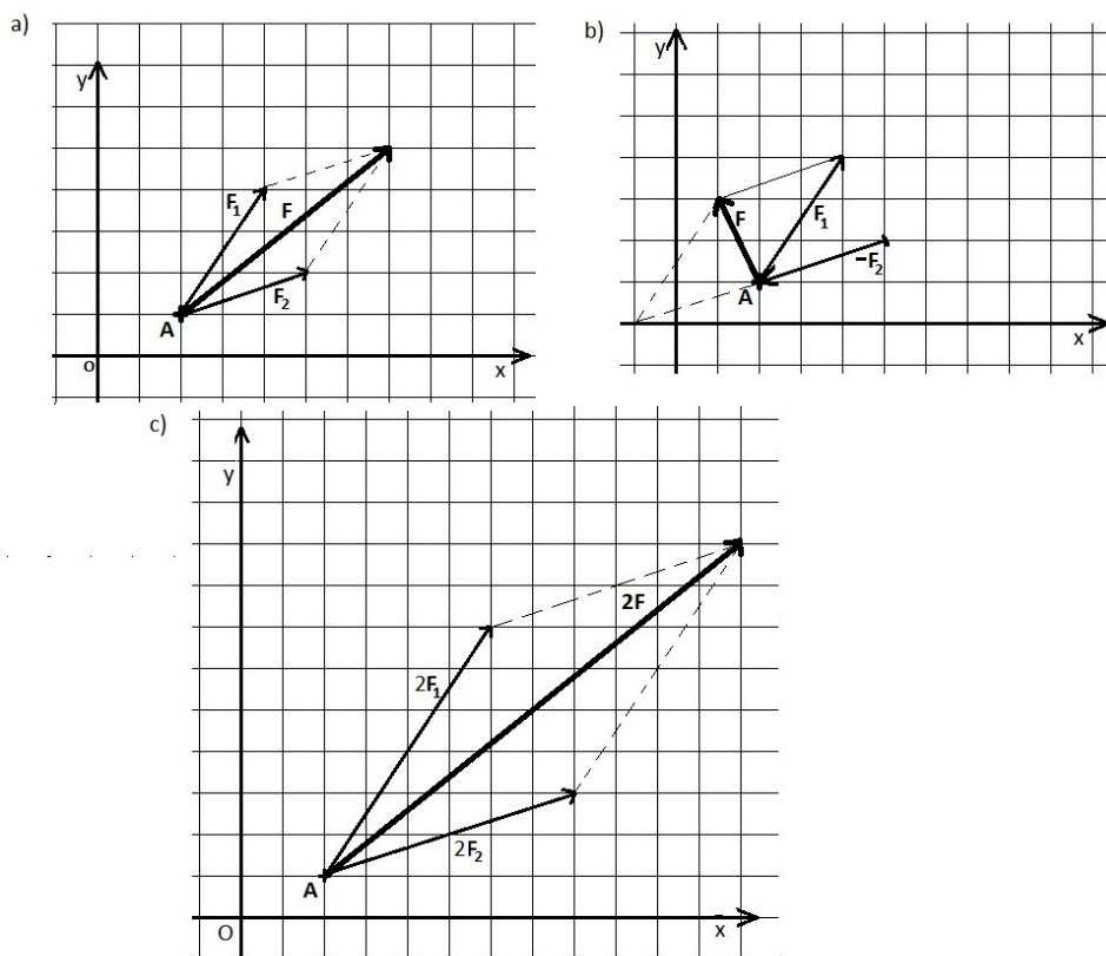
[1]

Pozn.: Ve větě již neznačíme vektorové operace $\odot$ a $\oplus$, avšak korektně musíme rozlišovat mezi násobením/sčítáním skalárů a vektorů.

2.3.2 Součet vektorů, násobek vektoru reálným číslem

Ze střední školy také známe operace jako sčítání vektorů, odečítání vektorů (jakožto přičtení opačných vektorů) a násobení vektoru reálným číslem. Tyto operace jsou vlastně praktickou aplikací předchozí definice vektorového prostoru. Obrázek níže názorně interpretuje tyto operace pro jednoduchost ve dvourozměrné kartézské souřadné soustavě (analogicky by se postupovalo v trojrozměrném prostoru). Vše je vysvětleno na příkladu vektorů sil $\mathbf{F}_1 = (f_{11}; f_{12})$ a $\mathbf{F}_2 = (f_{21}; f_{22})$, které působí na hmotný bod $A = [2; 1]$ na obrázku 3, mají tedy společné působiště.

Skládání vektorů či vektorový součet označujeme též jako **superpozice** vektorů. Princip superpozice formuloval v 17. století I. Newton. Dodejme, že je jakýmsi nedokazatelným axiomem – víme, že v přírodě tento princip funguje, není v neshodě s pozorovanými jevy.



Obr. 3: Operace s vektory – a) sčítání vektorů, b) odečítání vektorů, c) násobek vektorů reálným číslem

Je vidět, že vektory sil jsou vázány na hmotný bod A. Pro získání výslednice sil $\mathbf{F}$ (operace sčítání, odčítání vektorů) se však jeden nahradí za volný vektor (viz přerušované čáry) a jeho počáteční bod se posune do koncového bodu druhého silového vektoru. Nahrazení tohoto vektoru však může proběhnout za předpokladu, že všechny síly mají společné působiště (bod A)! Výslednicí je potom vektor s počátečním bodem A a koncovým bodem, který vznikl tímto složením. V rámci tohoto počítání se jednoduše uplatňuje doplnění na rovnoběžník.

V reálu by tato situace odpovídala na příklad tomu, že jsou na těleso přivázány provazy, za které táhnou ve směrech těchto sil lidé silami o hodnotách $|\mathbf{F}_1| = F_1$ a $|\mathbf{F}_2| = F_2$ newtonů. Výsledkem bude, že se těleso bude pohybovat ve směru výslednice sil znázorněné vektorem $\mathbf{F} = (f_1; f_2)$ – ekvivalentně lze říct, že těleso bude vykonávat stejný

pohyb, jako kdyby těleso táhl jeden člověk silou F newtonů ve směru výslednice sil F . (Poznamenejme, že se těleso bude pohybovat, pokud je splněna podmínka, že výslednice daných sil je větší než tíhová síla působící na těleso.)

Podíváme-li se na souřadnicová vyjádření, zjistíme, že obecně platí:

a) $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}$

$$(f_{11}; f_{12}) + (f_{21}; f_{22}) = (f_1; f_2)$$

$$f_1 = f_{11} + f_{21}$$

$$f_2 = f_{12} + f_{22}$$

b) $\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1 + (-\mathbf{F}_2) = \mathbf{F}$

$$(f_{11}; f_{12}) - (f_{21}; f_{22}) = (f_1; f_2) + (-f_{21}; -f_{22}) = (f_1; f_2)$$

$$f_1 = f_{11} - f_{21}$$

$$f_2 = f_{12} - f_{22}$$

c) $2\mathbf{F}_1 + 2\mathbf{F}_2 = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1) + (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) + (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \mathbf{F} + \mathbf{F} = 2\mathbf{F}$

$$2(f_{11}; f_{12}) + 2(f_{21}; f_{22}) = (2f_{11}; 2f_{12}) + (2f_{21}; 2f_{22}) = (2f_1; 2f_2)$$

$$2f_{11} + 2f_{21} = 2(f_{11} + f_{21}) = 2f_1$$

$$2f_{12} + 2f_{22} = 2(f_{12} + f_{22}) = 2f_2$$

Grafické sčítání matematických či volných vektorů, které nemají v prostoru žádný společný bod, se děje analogicky – buď můžeme všechny jejich počátky posunout do jednoho bodu a tento soubor vektorů postupně redukovat pomocí úhlopříček z doplnění na rovnoběžníky, nebo jednoduše postupně po jednom posunovat počáteční bod jednoho vektoru do koncového bodu jiného vektoru a tento proces opakovat tak dlouho, dokud nedostaneme jeden výsledný vektor.

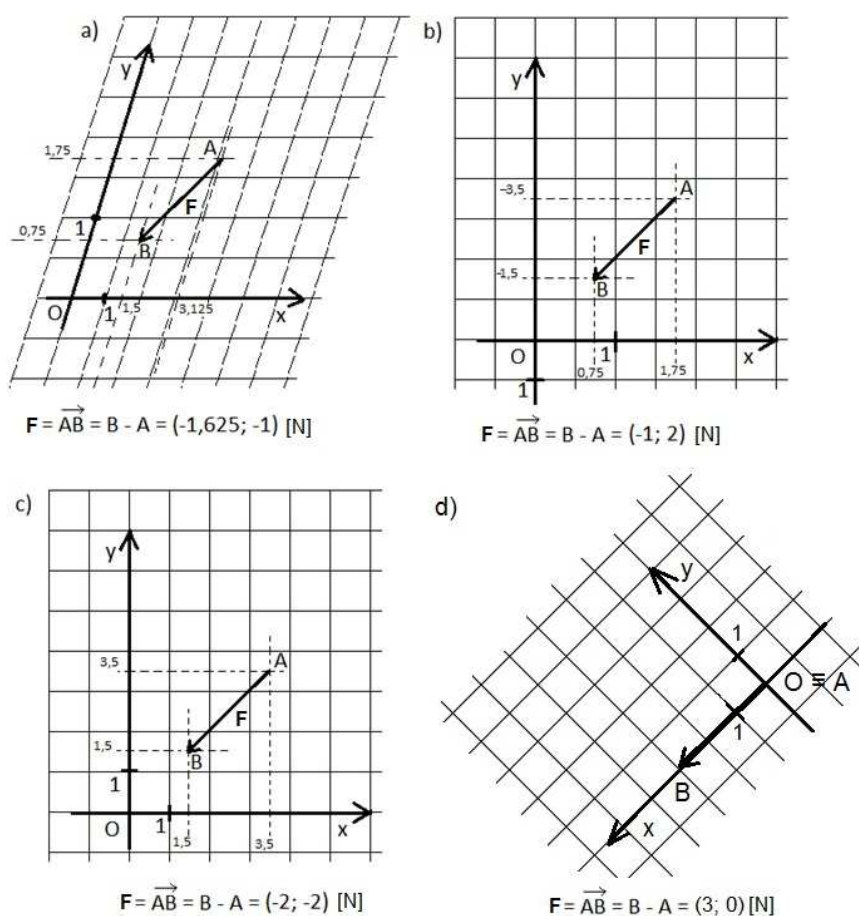
Nyní jsme si vysvětlili skládání (součet, superpozici) vektorů. Co je ale klíčové k dalšímu studiu této problematiky, je uvědomění „zpětného chodu“ této operace, tedy že každý vektor lze také rozložit do různých složek – vektorů(!)

Pozn.: Připomeňme, že pojem „hmotný bod“ (HB) zavádíme ve fyzice pro těleso, jehož rozměry nehrají roli (jsou zanedbatelné) vůči jemu pohybu. Při vyobrazení v nějaké souřadné soustavě jej umísťujeme do těžiště tělesa a přidělujeme mu hmotnost tohoto tělesa. Protože zanedbáváme jeho rozměry, je jasné, že se hmotný bod nemůže otáčet kolem vlastní osy.

2.3.3 Vyjádření vektoru v různých souřadnicových systémech

Jak bylo naznačeno, souřadnicové vyjádření nějakého vektoru závisí na volbě souřadnicové soustavy. Tu tvoří souřadnicové osy protínající se v počátku, na kterých jsou zadány jednotky. Počet těchto os je v n -rozměrném prostoru n , naše představivost končí u dimenze 3 (objasnění níže).

Souřadnice nějakého bodu obecně získáme rovnoběžným promítáním do souřadnicových os. Souřadnice vektoru jsou pak dány rozdílem souřadnic dvou bodů, mezi kterými je vektor určen. Následující obrázek znázorňuje vyjádření téhož vektoru síly $\mathbf{F} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ působící na hmotný bod znázorněný bodem A ve 4 různých souřadnicových systémech pro jednoduchost v rovině (2D). Rovnoběžné promítání je znázorněno přerušovanou čarou.



Obr. 4: Vyjádření téhož vektoru v a) obecné souř. s., b) ortogonální souř. s., c) ortonormální souř. s., d) ortonormální spojené s hmotným bodem

Pozn.: V ortogonální soustavě jsou na sebe osy kolmé, v ortonormální mají navíc stejné jednotky.

Ve fyzice si při řešení úloh vedoucích na silové diagramy (zjednodušené znázornění působících sil na těleso) často volíme ortonormální souřadnou soustavu s osami x a y tak, aby se řešení optimalizovalo. Na obrázku 4 je tomu tak očividně v případě d).

Velmi výhodné je v rámci vektorového počtu pracovat také s tzv. bází daného prostoru, kterou tvoří vektory $\mathbf{e}_i$ ve směru souřadnicových os a s danou velikostí (ve fyzikální soustavě i s jednotkou). Tuto bázi označujeme $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$. Na obrázku 5 jsou znázorněna 3 ta samá vyjádření pro změnu vektoru rychlosti pomocí zadané báze.

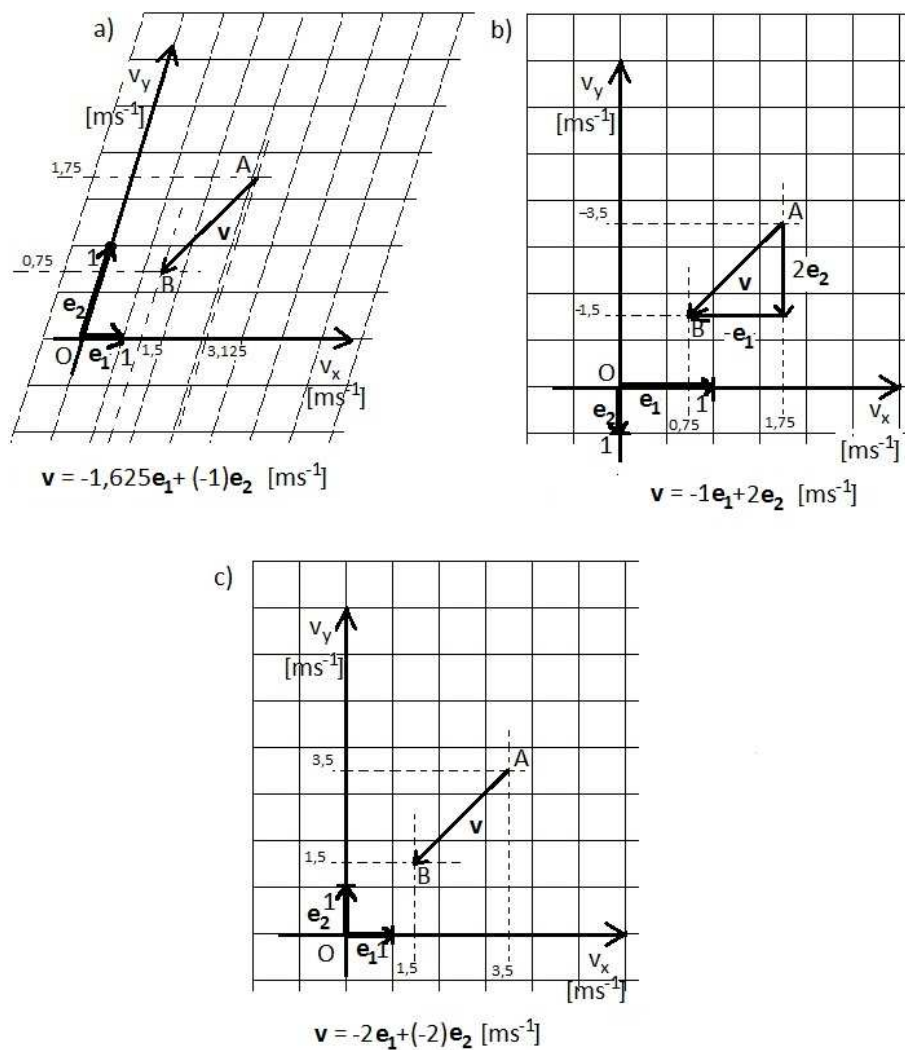
Definice báze vektorového prostoru [1]

Nechť je dán nějaký vektorový prostor V nad tělesem T . Řekneme, že konečná posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ z V je báze vektorového prostoru pokud:

1. vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé
2. vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ generují vektorový prostor V

[1]

Generování podprostoru prakticky znamená, že každý další vektor $\mathbf{u}_{n+1}$ daného vektorového prostoru dimenze n lze vyjádřit pomocí součtu násobků n bázevých vektorů (jejich lineární kombinací (viz níže)).



Obr. 5: Vyjádření vektoru rychlosti $\mathbf{v}$ pomocí bázevých vektorů

Pozn.: Souřadnice bodu značíme v hranatých závorkách, souřadnice vektoru (orientované úsečky) značíme v kulatých závorkách. Přitom platí:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = B - A \rightarrow B = A + \mathbf{v}$$

V souřadnicích píšeme:

$$\mathbf{v} = [b_1; b_2; \dots; b_n] - [a_1; a_2; \dots; a_n] = (b_1 - a_1; b_2 - a_2; \dots; b_n - a_n)$$

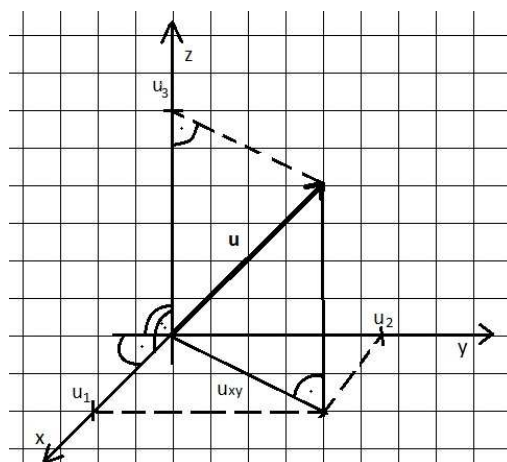
A dále pro vyjádření bodu z první rovnice v souřadnicích:

$$B = [a_1; a_2; \dots; a_n] + (b_1 - a_1; b_2 - a_2; \dots; b_n - a_n) =$$

$$= [a_1 + (b_1 - a_1); a_2 + (b_2 - a_2); \dots; a_n + (b_n - a_n)] = [b_1; b_2; \dots; b_n]$$

Navíc předpokládáme-li ortonormální souřadnou soustavu, pak je obecně velikost lib. vektoru, tedy velikost úsečky z Pythagorovy věty:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$$



Obr. 6: Velikost vektoru $\mathbf{u}$ ve 3D prostoru

Na obr. 6 značíme kolmý průmět vektoru $\mathbf{u}$ do roviny danou osami x a y jako u_{xy} . Platí:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_{xy}^2 + u_3^2} = \sqrt{(\sqrt{u_1^2 + u_2^2})^2 + u_3^2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

2.3.4 Lineární kombinace vektorů

Z předchozího příkladu vidíme, že vektor $\mathbf{v}$ lze vyjádřit složením (součtem) nějakých násobků vektorů, které leží ve směru souřadnicových os (bázových vektorů). Ba co více, souřadnice tohoto vektoru jsou určeny právě těmito koeficienty (násobky) bázových vektorů. Když lze nějaký vektor vyjádřit pomocí složení násobků jiných vektorů, říkáme, že tento vektor je jejich lineární kombinací (viz názorně případ b) na obrázku 5).

Definice lineární kombinace vektorů

Nechť je dán nějaký vektorový prostor V nad tělesem T a nechť je dána nějaká konečná posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ z V . Pokud najdeme čísla $a_1, \dots, a_k$ z T , z nichž alespoň jedno je různé od nuly, tak, že:

$$a_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \dots + a_k \cdot \mathbf{u}_k = \mathbf{0},$$

pak říkáme, že vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně závislé. V opačném případě říkáme, že vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé.

[1]

Je vidět, že každý vektor v rovině, tedy prostoru dimenze $n = 2$, můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci 2 vektorů, které ovšem nemají stejný nebo opačný směr. Soubor takových vektorů nazýváme lineárně závislý. Rozšíříme-li tuto soustavu o další dimenzi (další osu) zjistíme, že bázeový vektor náležící této ose nelze vyjádřit pomocí nějaké lineární kombinace dvou předchozích vektorů. Soubor těchto tří vektorů nazýváme lineárně nezávislý.

Definice lineární závislosti a nezávislosti vektorů

Nechť je dán nějaký vektorový prostor V nad tělesem T , dále je dána konečná posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ a $a_1, \dots, a_k \in T$. Pak vektor:

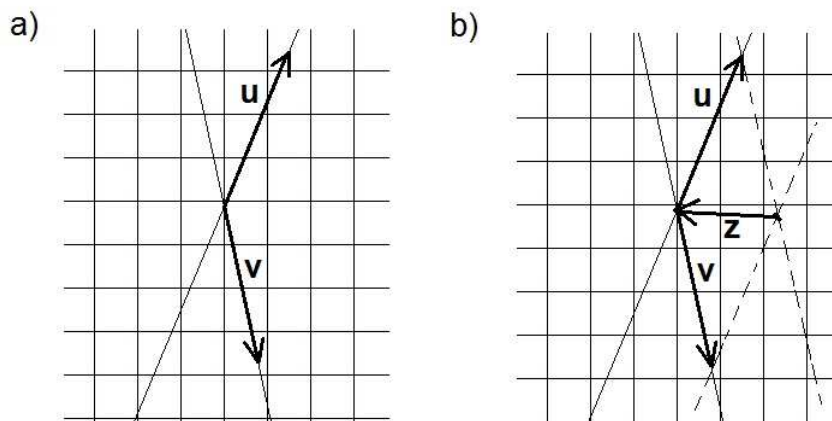
$$\mathbf{u} = a_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \dots + a_k \cdot \mathbf{u}_k$$

nazýváme lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.

[1]

Z definice je patrné, že pokud je v souboru vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ alespoň jeden vektor nulový, pak je tento soubor vektorů lineárně závislý.

Následující obrázek znázorňuje soubor lineárně závislých a nezávislých vektorů v rovině.



Obr. 7: Soubor lineárně nezávislých (a) a lineárně závislých (b) vektorů v rovině

Z případu a) je vidět, že nulový vektor získáme z daných dvou (nenulových) vektorů u a v jedině tak, že bychom sečetli jejich nulové násobky. To znamená, že žádný koeficient by nebyl různý od nuly, podle definice je tedy tento soubor vektorů lineárně nezávislý. Naopak v případě b) vidíme, že nulový vektor z vektorů u , v a z získáme jejich pouhým sečtením, jejich koeficienty by tedy byly rovny 1, z definice jsou tedy tyto vektory lineárně závislé.

Nyní získáváme odpověď na to, proč nedokážeme znázornit soustavu vyšší dimenze než 3. Zjistili jsme, že bázi tvoří v n -rozměrném prostoru n lineárně nezávislých vektorů. Pro nejvýhodnější počítání byla zavedena ortogonální (nebo ortonormální) báze dána kolmými směry bazových vektorů. Pro prostory dimenze $n = 0$ by bázi tvořil triviální (nulový) bazový vektor (bod), $n = 1$ jeden vektor, $n = 2$ dva kolmé vektory, $n = 3$ tři kolmé vektory, $n = 4$ čtyři kolmé vektory atd. A zde je jádro našeho problému – 4 na sebe kolmé vektory (potažmo obecněji lineárně nezávislé vektory) si zkrátka nedovedeme představit.

Poznamenejme, že ona kolmost bazových vektorů je induktivně dána tak, že n -tý bazový vektor je kolmý na podprostor, který generoval systém předchozích $(n - 1)$ bazových vektorů. Dohromady tvoří systém n kolmých vektorů; říkáme, že tento n -tý vektor leží v kolmém doplňku (zde přímce) prostoru generovaného předchozími $(n - 1)$ vektory.

Konkrétně: prostor dimenze $n = 0$ (bod) je triviální generován nulovým bázevým vektorem; bázevým vektor prostoru dimenze $n = 1$ (přímka) je kolmý na (triviální) bázevým vektor generující prostor dimenze $n = 0$; bázevým vektor prostoru dimenze $n = 2$ (rovina) je kolmý na předchozí bázevým vektor, který generoval podprostor dimenze 1 (rovina), každý bázevým vektor prostoru dimenze $n = 3$ (3D prostor) je kolmý na oba dva ostatní bázevé vektory, které generovaly podprostor dimenze 2, každý bázevým vektor dimenze $n = 4$ (4D prostor) je kolmý na ostatní 3 bázevé vektory, které generovaly podprostor dimenze 3 atd. Více v následující podkapitole. Tento obšírně vysvětlený fakt je plodnou půdou pro pochopení vektorového součinu v obecné dimenzi.

Pro pochopení kolmých doplňků:

Mějme prostor dimenze n a v něm podprostor dimenze k . Pro kolmý doplněk tohoto podprostoru dimenze k platí, že jej generuje $n - k$ vektorů, které jsou kolmé k tomuto prostoru dimenze k (ke všem bázevým vektorům, které generují podprostor dimenze k). Pro doplňkové (komplementární) podprostory platí, že součet jejich dimenzí dává dimenzi celého prostoru n . Např. v rovině mohou být komplementárními prostory 2 kolmé přímky (nebo triviální nulový vektor a celá rovina), v prostoru dimenze 3 pak kromě triviálního případu pak rovina a k ní kolmá přímka a naopak.

2.3.5 Skalární součin

Kromě předešlých operací s vektory můžeme nadefinovat i tzv. skalární součin vektorů. Jak uvidíme, výsledkem tohoto součinu je skalár, tedy pouhé číslo. Ačkoliv jde opět jen o definici, implicitně vlastně vytváříme mocný nástroj, který vektorům přiřadí velikost(!)[2]

V první kapitole jsme se seznámili s vektory jako orientovanými úsečkami. Chceme-li určit velikost vektoru $u = |\mathbf{u}| = \|\mathbf{u}\|$, přirozeně požadujeme, aby funkce „ $\|\cdot\|$ ” splňovala některé vlastnosti, na které jsme zvyklí (např. že velikost vektoru musí být kladné číslo). Na základě těchto vlastností se definuje obecný pojem tzv. vektorové normy (velikosti).

Nyní si trošičku vysokoškolsky „zdefinujeme“. Opět se není čeho bát, jedná se většinou o zpřehlednění, ucelení a zobecnění poznatků, se kterými jsme se setkali na SŠ.

Definice normy (velikosti) vektoru

Mějme nějaký vektorový prostor V nad tělesem skalárů $\mathbb{R}$. Řekneme, že zobrazení $\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}$ je vektorovou normou, pokud pro $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a $\forall t \in \mathbb{R}$ platí:

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0, \|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$... pozitivní definitnost
2. $\|t\mathbf{u}\| = |t| \cdot \|\mathbf{u}\|$... homogenita
3. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$... trojúhelníková nerovnost

[15]

Pozn.: Rovnost případu „3“ platí, pokud jsou vektory lineárně závislé.

Naše oblíbená a bytostně známá norma je norma eukleidovská, kde pro vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ v ortonormálním souřadném systému platí:

$$\|\mathbf{u}\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$$

Tato norma jako důsledek Pythagorovy věty určuje vzdálenost dvou bodů, mezi kterými je vektor $\mathbf{u}$ určen (viz obr. 6). Snadno se přesvědčíme, že splňuje axiomy 1-3.

Pozn.: Existují i jiné vektorové normy, např. norma maximální, dána jako

$$\|\mathbf{u}\|_{\infty} = \max_{i=1,2,\dots,n} |u_i|$$

či norma součtová, podle které je velikost vektoru definována takto:

$$\|\mathbf{u}\|_E = \sum_{i=1}^n |u_i|$$

Na základě normy můžeme také měřit vzdálenosti dvou bodů v prostoru. Následující definice opět pojem vzdálenosti zobecňuje pro obecný vektorový prostor jako jeho metriku.

Definice metriky vektorového prostoru

Mějme nějaký vektorový prostor V nad tělesem skalárů $\mathbb{R}$. Řekneme, že zobrazení $\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je metrikou vektorového prostoru, pokud pro $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ platí:

1. $\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0, \rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \equiv \mathbf{v} \dots$ pozitivní definitnost
2. $\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \rho(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \dots$ homogenita
3. $\rho(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \leq \rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \rho(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \dots$ trojúhelníková nerovnost

[15]

Každá norma, kterou jsme si definovali výše, indukuje metriku (vzdálenost dvou bodů) jako reálnou funkci $\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$. Děje se tak tedy elegantním a nám již známým způsobem pomocí rozdílu dvou vektorů (srovnej s kapitolou 2.3.2).

Definice skalárního součinu

Následující odstavec je uveden ve zdroji [2], s.48.

Na střední škole jsme si definovali standardní (eukleidovský) skalární součin (ozn $\bullet$) vektorů $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ jako přiřazení skaláru těmto vektorům následujícím způsobem:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

Pozn.: Pojem „standardní (eukleidovský) skalární součin“ má své opodstatnění – existují totiž i jiné druhy skalárních součinů, o kterých se zde nezmiňujeme. Vysokoškolská definice pojem skalární součin zobecňuje.

Toto přiřazení má následující vlastnosti, které definují obecný skalární součin v obecném vektorovém prostoru. Takto se plynule dostáváme k vysokoškolské definici skalárního součinu.

Ve vektorovém prostoru $V = \mathbb{R}^n$ (nad tělesem $\mathbb{R}$) definujeme zobrazení $\bullet: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Toto zobrazení nazveme skalárním součinem, pokud pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a $t, s \in \mathbb{R}$ splňuje následující axiomy:

- (1) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$... symetrie (komutativita)
- (2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{w} + \mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$... aditivita
- (3) $(t \cdot \mathbf{u}) \bullet \mathbf{v} = t \cdot (\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})$... homogenita
- (4) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} \geq 0 \wedge \mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$... pozitivní definitnost

Skalární součin dvou vektorů můžeme značit jako $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Definice velikosti vektoru pomocí skalárního součinu

Vlastnosti (1)-(3) jsou axiomy tzv. bilinearity. Ze čtvrté vlastnosti se dá velmi hezky nadefinovat velikost (eukleidovská norma) libovolného vektoru z V značená „ $\|\cdot\|$ “ nebo „ $|\cdot|$ “ jako reálné číslo:

$$u = |\mathbf{u}| = \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}}$$

Vektor s velikostí $\|\mathbf{u}\| = 1$ nazýváme jednotkový vektor. Také zápis $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}$ zkracujeme jako $\mathbf{u}^2$ – dosadíme-li do normy, zřejmě platí $\mathbf{u}^2 = \|\mathbf{u}\|^2 = u^2$.

Pozn.: Po dosazení standardního skalárního součinu do definované normy obecného skalárního součinu vidíme, že odpovídá normě eukleidovské.

Normovaný nenulový vektor libovolného nenulového vektoru $\mathbf{u}$ je vektor téhož směru, jehož velikost je rovna 1. Označíme-li jednotkový vektor příslušný vektoru $\mathbf{u}$ jako $\mathbf{u}_0$, potom vektor $\mathbf{u}$ můžeme pomocí předchozího vzorce zapsat ekvivalentně jako:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \|\mathbf{u}\|,$$

odkud pak jednoduše pro jednotkový vektor $\mathbf{u}_0$ a jeho souřadnice:

$$\mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} (u_1; u_2; \dots; u_n) = \left(\frac{u_1}{\|\mathbf{u}\|}; \frac{u_2}{\|\mathbf{u}\|}; \dots; \frac{u_n}{\|\mathbf{u}\|} \right)$$

Dále se vraťme zpátky ke skalárnímu součinu. Přímo z jeho definujících vlastností plyne Cauchyova–Schwartzova nerovnost, na základě níž se definuje odchylka vektorů.

Věta – Cauchyova–Schwartzova nerovnost

Pro velikost jakéhokoliv skalárního součinu vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v} \in V$ platí:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|,$$

přitom rovnost nastává právě tehdy, jsou-li vektory lineárně závislé.

Odstraníme-li u skalárního součinu absolutní hodnotu, tím spíše bude nerovnost platit. Za předpokladu, že jsou oba vektory nenulové, pak malou úpravou dostáváme:

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \leq 1 \wedge \frac{-(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \geq -1$$

Podíl tedy nabývá spojitě hodnot $\langle -1, 1 \rangle$, což je zároveň obor hodnot funkce sinus na intervalu $\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$ nebo kosinus na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Vidíme, že „příjemnější“ korespondence nastává u funkce kosinus.

Na základě tohoto vztahu se definuje odchylka dvou nenulových vektorů.

Definice odchylky dvou vektorů

Pro každé dva nenulové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ z vektorového prostoru V definujeme jejich odchylku jako konvexní úhel:

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \arccos \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}$$

Z definičního oboru, oboru hodnot a průběhu (vlastností) funkce kosinus a předchozí definice plyne, že vektory svírají úhel 90° (tj. jsou kolmé (ortogonální)) právě tehdy, je-li skalární součin roven nule. A dále, jak jsme již poznamenali z Cauchyovy–Schwartzovy nerovnosti, vektory svírají 0° či 180° , jsou-li lineárně závislé. Na základě tohoto poznatku přejdeme k další definici.

Definice ortogonálních a ortonormálních vektorů

Mějme danou nějakou posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ v nějakém vektorovém prostoru. Řekneme, že tato posloupnost vektorů je ortogonální, pokud skalární součin každých dvou různých vektorů této posloupnosti je nula, tedy:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0, i \neq j, i = 1, 2, \dots, k \text{ a } j = 1, 2, \dots, k$$

Pokud je navíc velikost každého vektoru tohoto souboru vektorů rovna jedné, potom se tato posloupnost vektorů nazývá ortonormální.

Uvažujme nyní skalární součin vektoru $\mathbf{e}_i$ z ortonormální posloupnosti vektorů samotného se sebou. Pro takový vektor navíc platí:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$$

Je známo, že matematikové a fyzikové si rádi zápisy zkracují – skalární součin dvou vektorů $\mathbf{e}_i$ a $\mathbf{e}_j$ z ortonormální posloupnosti vektorů můžeme jednoduše zapsat pomocí

tzv. Kroneckerova symbolu $\delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ (též Kroneckerovo delta), který je definován takto:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{pokud } i \neq j \\ 1, & \text{pokud } i = j \end{cases}$$

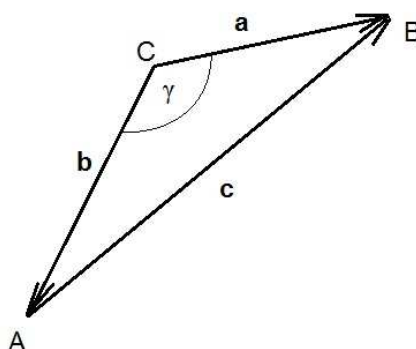
Intuitivně chápeme (a dá se i dokázat), že v každém konečně rozměrném vektorovém prostoru lze najít ortogonální (kolmou) bázi. Stejně tak chápeme, že každá ortogonální posloupnost je lineárně nezávislá. Jak jsme předeslali na konci kapitoly 2.3.4, naše představivost ortonormální posloupnosti vektorů (báze) končí u dimenze 4.

Již několikrát jsme výše použili přívlastek „eukleidovský“, aniž bychom tento pojem blíže objasnili. Je dobré tento jej vysvětlit pomocí eukleidovské geometrie – jedná se vlastně o „uvědomění si“ a sumarizaci poznatků, které nás provázejí již od dětství. Kouzlo eukleidovské geometrie (Eukleidés, přelom 4. a 3. století př. n. l.) spočívá v tom, že je celá založena na pouhých 5 postulátech, ze kterých se pak dokazují stovky vět. Svoje poznatky shrnuje v knize *Základy (Elementa)*. A abychom neužili jen kouzla této geometrie, ale i kouzel češtiny z roku 1907, z překladu Fr. Servíta „*Eukleidovy Základy*“ (str. 2) [9] si dovoluji citovat zmíněné postuláty:

- I. „*Budiž úkolem od kteréhokoliv bodu ke kterémukoliv vésti přímku.*“ (Dvěma body lze vést jedinou úsečku.)
- II. „*A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti.*“ (Úsečku lze na každé straně neomezeně prodloužit.)
- III. „*A z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem narýsoвати kruh.*“ (Každému bodu lze opsat kružnici s daným poloměrem.)
- IV. „*A že všechny pravé úhly sobě rovny jsou.*“ (Všechny pravé úhly jsou shodné.)
- V. „*A když přímka protínajíc dvě přímky tvoří na téže straně vnitřní (přilehlé) úhly menší dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna že se sbíhají na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.*“ (Dvě různoběžky se protínají na té straně, kde jsou přilehlé vnitřní úhly přičky těchto různoběžek menší než dva pravé úhly (180°).)

Pozn.: Pojmeme „přímka“ v textu výše se označoval geometrický útvar, který bychom dnes nazvali úsečkou.

Z těchto postulátů plyne mimo jiné také **kosinová věta** vyjadřující vztah mezi úhlem a stranami v obecném trojúhelníku. My udělejme jednu malou modifikaci – nahradíme strany trojúhelníku vektory, pro jejich tedy velikost bude platit $\|\mathbf{c}\| = c$ apod.:



Obr. 8: K odvození vztahu mezi odchylkou vektorů a skalárním součinem

Při standardním značení (viz obr. 8) platí:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

A zároveň pro vektory platí $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Umocníme-li **skalárně** tento vztah skalárně, pak z vlastností skalárního součinu a jeho normy plyne:

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

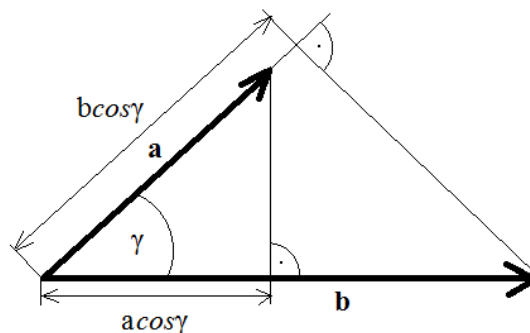
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

A porovnáme-li 3. tvar s kosinovou větou, pak vyplývá, že:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab\cos\gamma$$

Jeho geometrický význam plyne z definice funkce kosinus, tvar $a\cos\gamma$ značí kolmý průmět vektoru $\mathbf{a}$ do vektoru $\mathbf{b}$ a $b\cos\gamma$ zase kolmý průmět vektoru $\mathbf{b}$ do vektoru $\mathbf{a}$.



Obr. 9: Geometrický význam skalárního součinu

Vidíme, že průmět je nulový, pokud jsou vektory ortogonální, a maximální, pokud jsou vektory lineárně závislé (tj. leží na jedné přímce). Skalární součin tedy určuje velikost plochy dané pravoúhelníkem o straně a a $b \cos \gamma$, ekvivalentně o straně b a $a \cos \gamma$. Tento obsah bude největší, pokud budou vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ lineárně závislé, nulový pak, jestliže vektory budou na sebe kolmé. Tuto skutečnost využíváme ve fyzice např. pro práci (viz fyzikální aplikace skalárního součinu).

Odvozený vztah výše je vlastně jinak zapsaná definice pro odchylku dvou vektorů. Zde vidíme, že kosinová věta i s jejími důsledky platí v obecném eukleidovském prostoru.

Zjednodušená definice eukleidovského prostoru

Tedy jednoduše řečeno, eukleidovský prostor je takový prostor, ve kterém je definováno sčítání bodů a vektorů. Přitom vektory jsou prvky z nějakého vektorového prostoru, ve kterém je definován skalární součin.

Jak jsme uvedli výše, z Eukleidových postulátů se odvozují řady a řady geometrických vět, se kterými se seznamuje již na ZŠ. Ačkoliv v Základech není pojem obsahu přesně určen, pro naše účely bude určující poznatek, že rovnoběžníky (ve 3D pak rovnoběžnostěny) mají stejný obsah (objem), pokud mají stejnou základnu a výšku. Pro jejich určení je tedy třeba znát kolmé průměty do kolmých doplňků prostorů (viz komentář v závěru kapitoly 2.3.4). [2]

Následující definice pojem obsah zobecňuje pro různé objekty souhrnně jako n -rozměrný objem. Obsah je tedy speciálním případem objemu dvojrozměrného útvaru, délka pak jednorozměrného.

Definice objemu obecného rovnoběžnostěnu

Objem $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ konečného rovnoběžnostěnu určeného (lineárně nezávislými) vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ je nezáporné reálné číslo, pro které platí:

$$V(\mathbf{v}_1) = \|\mathbf{v}_1\|$$

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{w}_2\|$$

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \cdot \|\mathbf{w}_3\|$$

Obecně:

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}_n) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) \cdot \|\mathbf{w}_n\|$$

Vektory $\mathbf{w}_i$ značí kolmé průměty do kolmých doplňků podprostorů, které generoval systém předchozích vektorů $\mathbf{v}_i$.

[2]

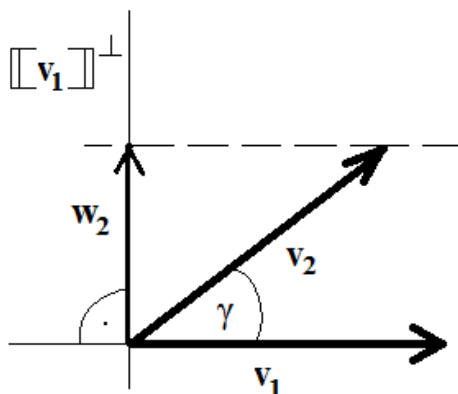
Konkrétně tedy vektor $\mathbf{w}_2$ je kolmý průmět do kolmého doplňku vektoru $\mathbf{v}_1$, tzn. prostoru všech lineárních kombinací vektoru $\mathbf{v}_1$, značíme $[\mathbf{v}_1]^\perp$, vektor $\mathbf{w}_3$ je kolmým průmětem do kolmého doplňku podprostoru, který je dán všemi lineárními kombinacemi vektorů $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$, zn. $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]^\perp = [\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2]^\perp$ apod.

Také je vidět, že objem n -rozměrného rovnoběžnostěnu je dán jako $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{w}_2\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{w}_n\|$.

Další řádky prozradí, jak je možno najít onen kolmý doplněk v dimenzi 2 a 3.

Princip Gramova–Schmidtova ortogonalizačního procesu

Představme si, dva lineárně nezávislé vektory, které nejsou ortogonální. Máme úkol je ortogonálními učinit. Nejjednodušší způsob je laicky řečeno jeden vektor k druhému „nakolmit“.



Obr. 10: Ke G–S OG procesu dvou vektorů v rovině

Vidíme, že kolmý doplněk je přímkou.

Vektor w_2 můžeme očividně zkonstruovat tak, že k vektoru v_2 přičteme nějakou lineární kombinaci vektoru v_1 , tj.:

A protože jsou vektory w_2 a v_1 kolmé, potom je jejich skalární součin roven nule:

Skalárním vynásobením první rovnice vektorem v_1 a dosazením můžeme získat tento koeficient lineární kombinace a:

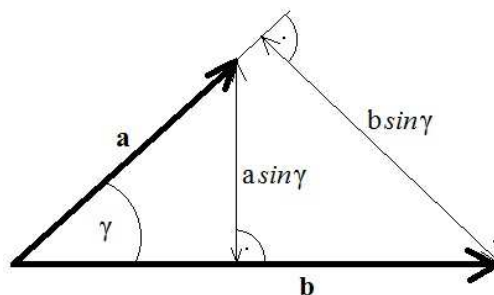
Nám však postačí myšlenka, že pro „nakolmení“ vektoru k jinému stačí, když k vektoru, který chceme ortogonalizovat, přičteme nějaký násobek vektoru, ke kterému má být první vektor kolmý.

V tomto případě vidíme, že pro velikost kolmého průmětu $\mathbf{w}_2$ platí:

$$\|\mathbf{w}_2\| = \|\mathbf{v}_2\| \sin \gamma,$$

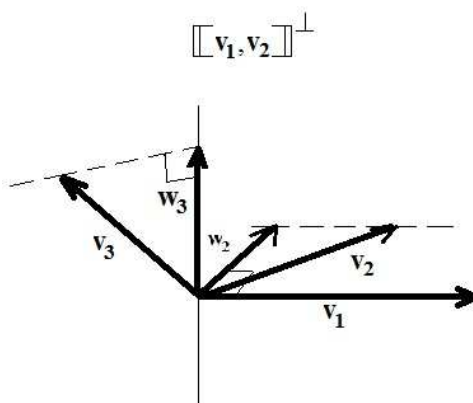
a tedy pro obsah rovnoběžníku daného vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ (na obr. 10 vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$):

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{w}_2\| = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \sin \gamma$$



Obr. 11: Obsah rovnoběžníka určeného vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$

Podobně by se postupovalo u 3D prostoru:



Obr. 12: Ke G–S OG procesu tří vektorů v prostoru

V tomto případě bychom přičítali k vektoru $\mathbf{v}_3$ nějakou lineární kombinaci vektorů $\mathbf{w}_2$ a $\mathbf{v}_1$. Dále bychom postupovali analogicky jako v předchozím případě pomocí nulového skalárního součinu kolmých vektorů $\mathbf{w}_3$ s $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{w}_3$ s $\mathbf{w}_2$.

2.3.6 Soustavy lineárních rovnic

Abychom mohli přistoupit k definici tolik očekávaného vektorového součinu, neobejdeme se bez zavedení pojmu determinant a matice. Následující řádky odbočí do soustav lineárních rovnic, se kterými jsme se setkali na střední škole. Vzápětí však zjistíme, že ono odbočení s tématem přece jen nějak souvisí – jak je napsáno na začátku kapitoly, zásluhou R. Dedekinda a G. Cantora si od konce 19. století můžeme představovat osu čili přímku reálných čísel, a tak propojit geometrii v kartézské souřadné soustavě se soustavami lineárních rovnic. To ve výsledku znamená, že dokážeme graficky znázornit řešení soustav lineárních rovnic, potažmo tedy pracovat s parametrickými vyjádřeními přímek, rovin a dalších prostorů – a tedy s vektory.

Nyní na konkrétních příkladech soustav lineárních rovnic neznámých **z oboru $\mathbb{R}$** pozorujeme jejich vlastnosti řešení. Základem úspěchu je seřadit si příslušné neznámé pod sebe. Ty jsou značeny jako $x_1, x_2, \dots, x_n$ s konkrétními koeficienty a_{ij} , kde index i značí číslo řádku a j značí číslo sloupce v takto uspořádaném systému soustav lineárních rovnic (je tedy jasné, že čísla i, j mohou nabývat jen přirozených hodnot). Čísla $d_1, d_2, \dots, d_k$ značí absolutní členy (opět index k je přirozený). Tedy $a_{ij}, d_i \in \mathbb{R}$. Uvědomme si, že řešením soustav rovnic vlastně hledáme průnik podprostorů, které jsou dány příslušnými rovnicemi. Předpokládejme, že dimenze prostoru, ve kterém soustavy rovnic řešíme, je n , tedy číslo dané počtem proměnných (neznámých).

Soustava dvou rovnic o dvou neznámých

$$(1) \ a_{11}x + a_{12}y = d_1$$

$$(2) \ a_{21}x + a_{22}y = d_2$$

Gaussovou metodou eliminace (tedy takovými úpravami a lineárními kombinacemi rovnic, které rovnice eliminují na jednu proměnnou, pokud to lze) vyjádříme neznámé x

a y. Lineární kombinaci řádků píšeme za lomítko, kde číslo v závorce značí číslo rovnice.

$$a_{11}x + a_{12}y = d_1 / \cdot a_{22} - a_{12} \cdot (2)$$

$$\underline{a_{21}x + a_{22}y = d_2 / \cdot a_{11} - a_{21} \cdot (1)}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}d_1 - a_{12}d_2$$

$$\underline{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}d_2 - a_{21}d_1}$$

Pro neznámé x a y tedy platí:

$$x = \frac{a_{22}d_1 - a_{12}d_2}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

$$y = \frac{a_{11}d_2 - a_{21}d_1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

Vidíme, že řešení bude mít smysl tehdy, pokud jmenovatel nebude roven nule, tedy:

$$a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21} \Leftrightarrow \frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

Což je ve skutečnosti poměr koeficientů proměnných – pokud by byly hodnoty absolutních členů rovny nule, tato podmínka znamená, že by rovnice (1) byla násobkem rovnice (2), tedy že by byly rovnice lineárně závislé.

Protože jsme však úpravami řešili rovnice s parametrem, je na místě vyšetřit i případ, kdyby byl jmenovatel roven nule. Potom ze vztahů neupravených na podíl vyplývá, že levé strany rovnic se budou rovnat nule a pravé strany závisí na rozdílu násobků absolutních členů příslušnými koeficienty. Pokud by pravé strany rovnic vyhovovaly nule, tedy pro případ, že by rovnice včetně absolutních členů byly lineárně závislé, bychom si za neznámou y zvolili reálný parametr. Množina řešení by tedy vyplnila přímku, bylo by jich nekonečně mnoho. Ovšem kdyby pravé strany byly různé od nuly, soustava rovnic by neměla řešení (průnikem prostorů daných rovnicemi by byla prázdná množina).

V překladu to tedy znamená, že pokud určený jmenovatel bude různý od nuly, soustava rovnic bude mít právě jedno řešení (v řeči průniku prostorů (zde přímek) daných rovnicemi je řešením bod).

Soustava tří rovnic o třech neznámých

$$(1) a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1$$

$$(2) a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2$$

$$(3) \underline{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3}$$

Opět upravujeme Gaussovou eliminací, tentokrát na schodovitý tvar (tj. takový tvar, kdy každý nižší řádek soustavy rovnic má eliminováno více proměnných než řádek vyšší). Inspirujme se předchozím tvarem.

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1 \rightarrow x = \frac{d_1 - a_{12}y - a_{13}z}{a_{11}}$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2 / \cdot a_{11} - a_{21} \cdot (1)$$

$$\underline{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3 / \cdot a_{11} - a_{31} \cdot (1)}$$

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y + (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})z = a_{11}d_2 - a_{21}d_1$$

$$\underline{(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})y + (a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13})z = a_{11}d_3 - a_{31}d_1}$$

Pro přehlednost zavedme nové značení koeficientů:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k_{11}$$

$$(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) = k_{12}$$

$$(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) = k_{21}$$

$$(a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13}) = k_{22}$$

Z předchozího případu víme, jak vypočítat neznámé y a z:

$$y = \frac{k_{22}(a_{11}d_2 - a_{21}d_1) - k_{12}(a_{11}d_3 - a_{31}d_1)}{(k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21})}$$

$$z = \frac{k_{11}(a_{11}d_3 - a_{31}d_1) - k_{21}(a_{11}d_2 - a_{21}d_1)}{(k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21})}$$

Po roznásobení pro jmenovatel získáváme:

$$\begin{aligned} & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13}) - (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) = \\ & = a_{11}^2a_{22}a_{33} + a_{12}a_{21}a_{13}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{31}a_{12} + a_{11}a_{21}a_{13}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{31}a_{13} + \\ & + (-a_{11}a_{12}a_{21}a_{33}) - a_{11}^2a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{13}a_{31} = \\ & = a_{11}[a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})] \end{aligned}$$

Pro čitatele u y:

$$\begin{aligned} & (a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13})(a_{11}d_2 - a_{21}d_1) - (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})(a_{11}d_3 - a_{31}d_1) = \\ & = a_{11}^2a_{33}d_2 + a_{31}a_{13}a_{21}d_1 + a_{11}a_{23}a_{31}d_1 + a_{21}a_{13}a_{11}d_3 - a_{33}a_{11}a_{21}d_1 + \\ & + (-a_{31}a_{13}a_{11}d_2) - a_{11}^2a_{23}d_3 - a_{21}a_{13}a_{31}d_1 = a_{11}l \end{aligned}$$

Analogicky by se dal pro čitatele u x vytknout koeficient a_{11} , tedy ve výsledku pro jmenovatele platí:

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Aby soustava rovnic měla právě jedno řešení, opět je třeba, aby byl jmenovatel různý od nuly.

Toto počítání by se dalo rozšířit pro obecnou soustavu n rovnic o n neznámých, vidíme ale, že pro prostor dimenze 3 je počítání velmi pracné. I když existují metody určení tohoto jmenovatele pro větší soustavy lineárních rovnic, nebudeme se zde o nich zmiňovat, protože k našemu účelu postačí sledování soustav 2 a 3 lin. rovnic.

Podíváme-li se na jednotlivé řádky soustav rovnic blíže, zjistíme, že jejich pravé strany je možné zapsat pomocí skalárního součinu – skutečně, pro soustavu 3 lin. rovnic o 3 neznámých platí:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = (a_{11}a_{12}a_{13}) \cdot (x, y, z)$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = (a_{21}a_{22}a_{23}) \cdot (x, y, z)$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = (a_{31}a_{32}a_{33}) \cdot (x, y, z)$$

Koeficienty a neznámé tedy tvoří v řeči vektorů jejich složky(!)

2.3.7 Krátká prohlídka matic

Všimněme si, že veškeré předchozí počítání se týkalo pouze koeficientů a absolutních členů – s proměnnými jsme v zásadě vůbec nic nedělali. Proto se dají soustavy rovnic uspořádat do přehlednějších útvarů zvaných matice. Její řádky jsou tvořené jednotlivými koeficienty proměnných, matice n soustav rovnic o n neznámých by potom vypadala následovně:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & d_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & d_n \end{array} \right)$$

Tato matice se nazývá rozšířená matice soustavy lineárních rovnic.

U soustav lineárních rovnic jsme komentovali případy, kdy tato soustava rovnic má právě jedno, žádné nebo nekonečně mnoho řešení. Pro toto zjištění můžeme postupovat tak, že nejprve zjistíme, zda jsou levé strany rovnic lineárně závislé, a potom se díváme na absolutní členy. V řeči matematiky tedy nejprve řešíme zhomogenizovanou soustavu rovnic, tj. případ, kdy všechny absolutní členy jsou rovny nule. Každá ekvivalentní úprava či lineární kombinace tedy nebude mít vliv na pravé strany rovnic. Tato matice má tedy tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right)$$

Pro náš konkrétní případ soustav 3 LR o 3 neznámých tedy:

$$\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right)$$

Pokud jsou některé řádky matice lineárně závislé, pak vhodnou lineární kombinací můžeme tyto řádky vynulovat. Tvar matice tedy přejde ze čtvercového na obdélníkový.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Takovou matici nazýváme maticí typu m/n .

Definice matice

Maticí A nad číselným tělesem T s prvky $a_{ij} \in T$ nazveme zobrazení $f: \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow T$, kde $f((i, j)) = a_{ij}$.

[3]

Index i značí řádkový a j sloupcový index, $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n$.

Pro úpravu jednotlivých řádků matice platí totéž, co pro ekvivalentní úpravy řešení soustav rovnic – můžeme tedy počítat pouze koeficienty stejných proměnných.

S porovnáním tvaru skalárního součinu na konci podkapitoly 2.3.6 se nám může zdát, že jsme soustavu těchto koeficientů svým způsobem „vytkli“ před uspořádanou trojici (x, y, z) . Dále si můžeme všimnout, že tato uspořádaná trojice vlastně tvoří řádkovou matici. Pokud zapíšeme tuto uspořádanou trojici jako jednu sloupcovou matici a umístíme-li ji za matici našich koeficientů pro 3 rovnice o 3 neznámých, potom:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Můžeme si všimnout, že pokud matici koeficientů vhodně vynásobíme s transponovanou maticí proměnných (tj. s maticí, která má zaměněné řádky a sloupce), dostaneme tvar levých stran soustavy lineárních rovnic. Ono „vhodné násobení“ vyplývá již z rozpisu na konci podkapitoly 2.3.6 – levou stranu soustavy lineárních rovnic dostaneme, pokud každý řádek matice koeficientů vynásobíme skalárně s transponovanou maticí neznámých.

Skalární součin mezi dvěma vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ tedy můžeme zapsat jako součin řádkové matice se souřadnicemi prvního vektoru a transponované matice se souřadnicemi druhého vektoru:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1 \quad u_2 \quad u_3) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Pro transpozici matice s prvky a_{ij} platí:

$$(a_{ij})^T = (a_{ji})$$

Následující definice násobení matic zobecňuje pro matice vyšších řádů.

Definice násobení matic

Mějme dvě matice $A = (a_{ij})$ typu m/p a $B = (b_{ij})$ typu p/n nad tělesem T . Součinem matic $A \cdot B = C = (c_{ij})$ je matice C typu m/n , pro jejíž členy platí:

$$c_{ij} = (A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Indexy $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.

[3]

Všimněme si, že nemůžeme násobit všechny typy matic – pouze takové, jejichž sloupcový index je roven řádkovému. Násobení matic tedy obecně není komutativní.

Vidíme, že násobení matic má charakter skalárního součinu. Skalární součin dvou vektorů je tedy speciálním případem násobení matic typu $1/n$ s maticí typu $n/1$.

2.3.8 Zavedení determinantu

V předchozí podkapitole jsme se dozvěděli, že řešitelnost rovnic pro případ právě jednoho řešení závisí na onom „jmenovateli“. Vyšetřili jsme jeho tvar v řeči matic pro

čtvercové matice druhého a třetího řádu. Tohoto „jmenovatele“ nazýváme determinantem matice n -tého řádu.

Pozn.: Implicitně je v textu řečeno, že právě tento determinant lze určit pouze pro čtvercové matice (které mají všechny řádky lineárně nezávislé).

Obecná definice determinantu čtvercové matice n -tého řádu je dosti spleťitá. Pro naše účely postačí sledovat význam determinantů matic 2. a 3. řádu.

Pro determinant (píše se jako matice v absolutní hodnotě) matice 2. řádu jsme zdůvodnili:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Tato skutečnost lze pomocí vektorového vyjádření zapsat jako:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}, a_{12}) \cdot (a_{22}, -a_{21})$$

Snadno se ověří, že vektor $(a_{22}, -a_{21})$ má směr kolmý k vektoru (a_{21}, a_{22}) .

A pro determinant 3. řádu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Což lze zapsat jako:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

A také platí:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \cdot \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right)$$

Jednotlivé složky druhého vektoru nazýváme subdeterminanty (minory) původní matice (3. řádu).

Stejně jako v případě matice druhého řádu můžeme předpokládat, že vektor, jehož složky jsou tvořeny minory, je kolmý k vektorům o složkách ve 2. a 3. řádku. To „zavání“ vektorovým součinem, ovšem k jeho úplnému objasnění je třeba ujit ještě pár kroků.

Některé vlastnosti determinantu

Již jsme si zdůvodnili, že jsou řádky matice lineárně závislé právě tehdy, je-li determinant roven nule.

Pozorováním dalších vlastností determinantu při řádkových úpravách zjistíme:

- Hodnota determinantu matice se při jejím transponování nezmění.
- Hodnota determinantu matice se nezmění, když k jednomu jejímu řádku přičteme libovolnou lineární kombinaci ostatních řádků (samozřejmě takovou, která zachová lineární nezávislost řádků).
- Hodnota determinantu se nezmění, pokud jeden řádek matice ponecháme beze změny a k ostatním řádkům přičteme jeho libovolné násobky.
- Záměnou dvou různých řádků matice se její determinant stane záporným. (antisymetrie)
- Vynásobení jednoho řádku matice reálným číslem t se hodnota jejího determinantu změní t -krát.
- Pro determinant dále platí (uvedeno na konkrétním příkladu matice 3. řádu):

$$\begin{vmatrix} a_{11} + s_1 & a_{12} + s_2 & a_{13} + s_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Totéž platí analogicky i pro sloupcové úpravy.

Poslední dvě vlastnosti jsou vlastnosti multilinearity.

Dále vyslovíme větu o součinu determinantů, ta bude třeba k výpočtům dále.

Cauchyova věta o násobení determinantů

Mějme dvě čtvercové matice A a B řádu n (nad stejným tělesem T). Pak pro jejich determinanty $|A|$ a $|B|$ platí:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

[3]

Grammův determinant

Zkonstruujeme čtvercovou matici tvořenou skalárními součiny vektorů $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{12})$ a $\mathbf{v}_2 = (v_{21}, v_{22})$ z nějakého eukleidovského prostoru dimenze 2 následovně:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} v_{11}^2 + v_{12}^2 & v_{11}v_{21} + v_{12}v_{22} \\ v_{21}v_{11} + v_{22}v_{12} & v_{21}^2 + v_{22}^2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$$

Jedná se o Grammovu matici 2. řádu. Její determinant (Grammův determinant, ozn. $G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$) je po dosazení vlastností skalárního součinu roven:

$$G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{vmatrix} = \|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$$

Pokud jsou vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ kolmé, potom pro obsah rovnoběžníku zřejmě platí:

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \sqrt{\begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{vmatrix}} = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2)$$

Druhá rovnost plyne z důsledku, že pokud jsou vektory kolmé, vektor $\mathbf{v}_2$ je totožný s jeho průmětem do kolmého doplnku vektoru $\mathbf{v}_1$, tedy s vektorem $\mathbf{w}_2$.

Vyšetříme případ, kdy vektory kolmé nejsou. Z vlastností determinantu plyne, že se jeho hodnota nezmění, pokud k druhému řádku přičteme $(-a)$ -násobek prvního řádku. Z vlastností skalárního součinu potom plyne:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 - a\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 - a\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \\ (\mathbf{u}_2 - a\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{u}_1 & (\mathbf{u}_2 - a\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{u}_2 \end{vmatrix}$$

Porovnáním s principem Grammova–Schmidtova ortogonalizačního procesu vidíme, že pro tuto ekvivalentní úpravu platí $\mathbf{u}_2 - a\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_2$, dosadíme-li tento poznatek do Grammova determinantu, potom pro další ekvivalentní sloupcovou úpravu, kdy od druhého sloupce odečítáme a -násobek prvního:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 - a\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_2 - a\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 - a\mathbf{u}_1) \\ \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{w}_2 \cdot (\mathbf{u}_2 - a\mathbf{u}_1) \end{vmatrix}$$

Tedy výsledný Grammův determinant:

$$G(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = G(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2 \end{vmatrix}$$

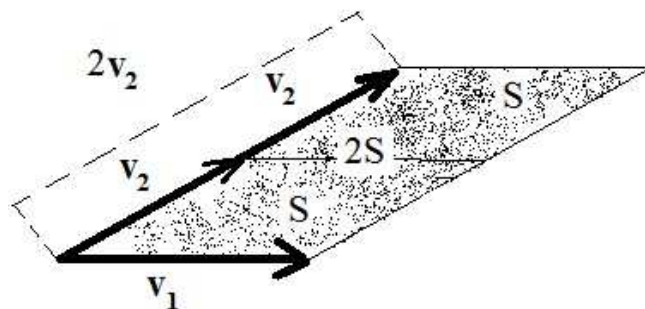
Podobně by se postupovalo u matic vyšších řádů. Tento fakt lze zobecnit pro objem rovnoběžnostěn v obecné dimenzi n , tedy:

$$V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \sqrt{\begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_n \end{vmatrix}} = \sqrt{G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)}$$

Z vlastností determinantu po dosazení do obsahu rovnoběžníku daného dvěma lineárně nezávislými vektory plyne:

$$V(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_2) = a \cdot V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

A skutečně – pokud vektor $\mathbf{v}_2$ vynásobíme a -krát, potom se i obsah tohoto rovnoběžníku zvětší a -krát:



Obr. 13: Obsah rovnoběžníku o dvojnásobné velikosti vektoru $\mathbf{v}_2$

Pro další odvozování, které povede k definici vektorového součinu v obecné dimenzi, je třeba zavést vnější součin n vektorů.

Definice vnějšího součinu n vektorů

Jako vnější součin n -tice vektorů $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ z eukleidovského prostoru dimenze n označujeme determinant matice, ve které jsou řádky (sloupce) tvořeny souřadnicemi vektorů (v tomto pořadí) vzhledem k nějaké ortonormální bázi. Značíme jej hranatými závorkami, platí tedy:

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] = \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$

[2]

Je vidět, že vnější součin může nabývat kladné i záporné hodnoty.

Zkusme najít spojitost mezi vnějším součinem a objemem rovnoběžnostěnu. Podle Cauchyovy věty a vlastností, že se transponováním matice hodnota jejího determinantu nezmění, platí:

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]^2 &= [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] \cdot [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]^T = \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \cdot \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)^T = \\ &= \det((\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \cdot (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)^T) = G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

Poslední rovnost tedy znamená:

$$G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = (V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n))^2$$

A tedy pro n -tici vektorů v n -rozměrném prostoru platí:

$$V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = |[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]|$$

Absolutní hodnotu přidáváme proto, že vnější součin může nabývat kladné i záporné hodnoty.

2.3.9 Vektorový součin

Prakticky vše, co jsme doposud uvedli, jsme dělali se záminkou dostat se k pochopení definice vektorového součinu v prostoru obecné dimenze.

Nejeden výukový materiál matematiky ve fyzice uvádí, že vektorový součin je definován jen v prostoru dimenze 3 pouze pro dva vektory. Ve fyzice samozřejmě používáme vektorový součin jediné dvou vektorů kvůli jakémusi zobecnění, jak se dozvíme v kapitole „Fyzikální aplikace“. My se ovšem v následujícím textu dozvíme, že z matematického hlediska jej lze rozšířit do prostoru obecné dimenze.

Pro výpočet vektorového součinu vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsme byli zvyklí si pomáhat determinantom následující matice s ortonormálními vektory ve směru souřadnicových os $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

$$,, \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} “$$

Uvozovky jsou zde opravdu na místě, jak jsme se dozvěděli, determinant je **pouhé číslo**, **nikoliv vektor** (plyne z definice matice nad číselným tělesem – její prvky jsou pouhá čísla)(!)

V kapitole 2.3.8 jsme mlčky zavedli vnější součin 3 vektorů $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ a $\mathbf{a}_3$ o souřadnicích koeficientů předchozích soustav lineárních rovnic. Platilo pro něj:

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \cdot \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right),$$

kde druhý vektor má přesně podobu složek vektoru vektorového součinu vektorů $\mathbf{a}_2$ a $\mathbf{a}_3$, platí tedy:

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)$$

Tento tvar vnějšího součinu (pro 3 lin. nez. vektory) je nazýván smíšený součin.

Tento poznatek zobecníme, takto se dostáváme k definici vektorového součinu v prostoru dimenze n .

Definice vektorového součinu v prostoru dimenze n

Vektorový součin $(n-1)$ -tice vektorů $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ v tomto pořadí, značíme $\mathbf{v}_1 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}$, v eukleidovském prostoru dimenze n je jednoznačně určený vektor $\mathbf{w}$, který splňuje:

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{x}] = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$$

pro všechny vektory $\mathbf{x}$ z téhož eukleidovského prostoru. Tedy $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}$.

([2], s. 73)

Je nad míru užitečné si uvědomit, že vektorový součin lze provést pouze v prostoru dimenze $n - 1$. Tvoří tedy kolmý doplněk k tomuto podprostoru.

O vlastnosti vektorového součinu dvou lineárně nezávislých vektorů v prostoru dimenze 3 ze SŠ víme, že je výsledkem vektor kolmý k oběma těmto vektorům. Také si vzpomeneme na tvar jeho velikosti – „shodou okolností“ (níže ukážeme, že to není pouhá shoda náhod) je rovna obsahu rovnoběžníku určeného dvěma vektory, ke kterým je výsledek vektorového součinu kolmý.

Vlastnosti obecného vektorového součinu

- antisymetrie a multilinearita
- $\mathbf{w} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ jsou lineárně závislé
- $\mathbf{w}$ je kolmý ke všem vektorům $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$
- jsou-li vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ lineárně nezávislé, pak uspořádaná n -tice vektorů $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w})$ tvoří kladnou bázi vektorového prostoru dimenze n
- $\|\mathbf{w}\| = V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$

([2], s. 73)

Zdůvodnění:

- Vlastnost antisymetrie a multilinearity plyne přímo z definice determinantu (smíšeného součinu).
- Vlastnost plyne přímo z dosazení $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ do definující rovnosti. Pravá strana je rovna nule, tedy i determinant roven nule, což platí právě tehdy, jsou-li jeho řádky lineárně závislé.
- Po dosazení libovolného vektoru $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ za $\mathbf{x}$ vidíme, že jsou řádky determinantu (vnějšího součinu) lineárně závislé, tzn., že je determinant roven nule, a z definující rovnosti je i skalární součin vektoru $\mathbf{w}$ a tohoto libovolného vektoru $\mathbf{v}_i$ roven nule, což nastává právě tehdy, jsou-li vektory kolmé.
- Pokud za vektor $\mathbf{x}$ dosadíme vektor $\mathbf{w}$, je vnější součin roven i pravá strana rovna $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$ a z pozitivní definitnosti skalárního součinu pro nenulový vektor $\mathbf{w}$ plyne $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} > 0$.
- Z téhož poznatku a dále z dokázaného vztahu mezi vnějším součinem a objemem n vektorů plyne:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{w}\|^2 = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}] = V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}) = V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) \|\mathbf{w}\|.$$

Vektorový součin $\mathbf{w}$ dvou vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ v prostoru dimenze 3 je možné také zkonstruovat pomocí nulových skalárních součinů vektorů $\mathbf{w}$, $\mathbf{u}$ a $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}$. Ty by pak vedly na soustavu rovnic danou určitými součiny složek vektorů, která by se dále řešila.

Jak vidíme, dělení vektoru vektorem vlivem bohatých druhů součinů definováno není.

3 FYZIKÁLNÍ APLIKACE ZÁKLADŮ VEKTOROVÉHO POČTU

Nyní máme dostatek objasněných prostředků, nástrojů pro to, abychom se mohli vrhnout do fyzikální aplikace těchto znalostí.

Tyto podkapitoly jsou věnována fyzikální aplikaci především „ryze“ vektorové algebry, tzn. přímé aplikace získaných matematických dovedností bez potřeb jiných oblastí matematiky. Ovšem některé kapitoly jsou velmi lehce okořeněny kouzlem derivace – pro nepřilíš matematické gurmány této oblasti je to zcela bezbolestné.

3.1 Některé základní fyzikální vektory

3.1.1 Newtonův zákon setrvačnosti alias Vektor síly a zrychlení

Velmi důležitou charakteristikou z hlediska poznávání fyzikálních dějů kolem nás je bezesporu síla. Na jejím základě stojí převážná většina fyzikálních zákonů od newtonovské mechaniky počínaje, kvantovou mechanikou konče. Ptáme-li se, kdy pociťujeme účinek nějaké síly, je to tehdy, pokud nás tato síla nutí změnit stav, ve kterém jsme situováni. Tuto skutečnost formuloval ve spisu *Principia Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* v 17. století Isaac Newton jako Zákon setrvačnosti (I. Newtonův pohybový zákon):

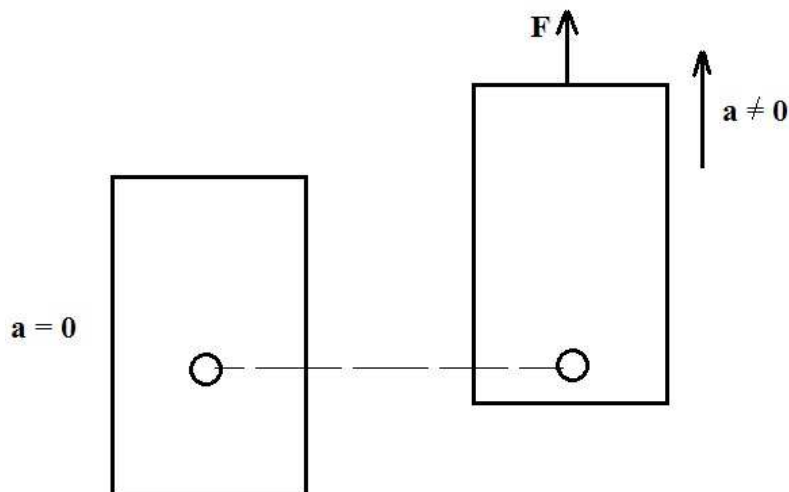
„Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.“ ([8], s. 14)

Přeloženo:

„Těleso setrvává v klidu nebo v pohybu rovnoměrném ve stejném směru, dokud není nuceno vnějšími silami tento pohybový stav změnit.“

Podobný princip vyslovil koncem 19. století francouzský chemik Henry Louis Le Chatelier jako Le Chatelierův princip rovnováhy při průběhu chemické reakce. Ten tvrdí, že systém, který je v rovnováze, reaguje na každou změnu tak, aby její účinek

zmařil. V porovnání se zákonem setrvačnosti vidíme analogii. V kapitole 3.3.7 se dokonce dozvíme, jaký tvar má tato „odporová síla“ (viz III. Newtonův zákon).



Obr. 14: Princip setrvačnosti tělesa (kuličky) pohybující se v soustavě bez zrychlení a se zrychlením

Podle principu I. Newtonova pohybového zákona je tedy přirozeným stavem tělesa buď klid, nebo pohyb rovnoměrný přímočarý. To je vskutku velký poznatek, neboť do dob Galilea bylo usuzováno, že i k rovnoměrnému pohybu přímočarému je nutná nějaká hnací síla. [6]

A zde narážíme na vztah mezi silou a zrychlením – těleso udělí zrychlení jinému tělesu, pokud na něj působí nějakou silou. A nepřekvapí nás, že síla udělí zrychlení tělesu ve směru, v jakém působila, jedná se tedy o vektory $\mathbf{F}$ a $\mathbf{a}$. Původce zrychlení (dynamika), síla, je tedy se zrychlením (kinematika) nějakým způsobem svázána. V kapitole 3.3.1 si zopakujeme jak – vyslovíme II. Newtonův zákon.

Jednotkou síly je newton [N], jehož rozměr si objasníme níže.

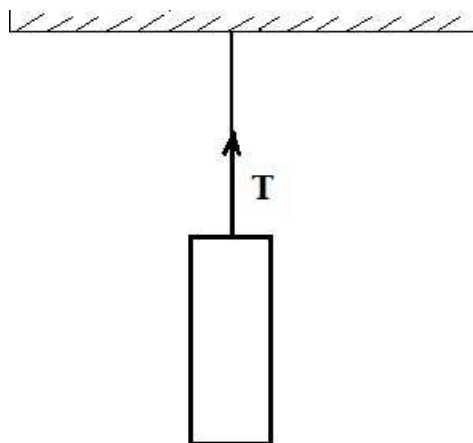
Pozn.: Každá síla, jako každý vektor, má nejen velikost a směr, ale i působiště.

3.1.2 Vektor normálové tlakové síly

Pokud těleso leží v klidu na podložce, působí na něj síla $\mathbf{F}_n$ (též označujeme $\mathbf{N}$) podložky kolmo ve směru od této podložky. Tento vektor zaznačujeme do náčrtku tak, že má počátek v místě styku tělesa a podložky a prochází těžištěm daného tělesa. Podrobněji v kapitole 3.5.3.

3.1.3 Vektor tahové síly vlákna

Je-li nějaké těleso zavěšené na provaze či vlákne, je toto vlákno napínáno – jeho jednotlivé části na sebe působí silou pnutí. Těleso je taženo silou $\mathbf{T}$, která má počátek v místě úchyty lanka a směr podél lanka směrem ven z objemu tělesa. Tuto sílu nazýváme tahová síla lanka. [HRW kap. 5]

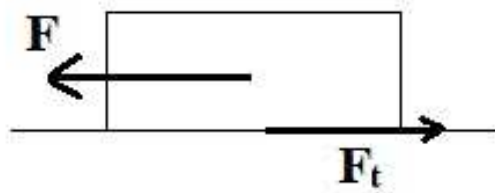


Obr. 15: Tahová síla vlákna

Pozn.: Většinou zanedbáváme hmotnost tohoto vlákna – považujeme jej za nehmotné. Jedná se o aproximaci, kdy hmotnost lanka je zanedbatelná vůči hmotnosti tělesa.

3.1.4 Vektor třecí síly

Jestliže těleso klouže po podložce nebo se jej snažíme do tohoto klouzavého pohybu uvést, brání nám v pohybu vazby na styčné ploše mezi podložkou a tělesem. Tyto odporové síly nazýváme síly tření a označujeme je vektorem $\mathbf{F}_t$ nebo $\mathbf{F}_s$, který má směr proti pohybu tělesa a leží na styčné ploše tělesa a podložky.



Obr. 16: Třecí síla F_t

Zanedbáváme-li tyto třecí síly, hovoříme o dokonale hladkém povrchu (podložce).

Pozn.: Teorie mikrosvárů tvrdí, že v místech styčných ploch, které jsou dokonale hladké, se utvoří mikroskopický svár, který jakoby dokonale spojí tělesa k sobě. Kdyby byl tedy povrch těles skutečně dokonale hladký, podle této teorie by se tělesa „přilepila“ k sobě, tedy nedošlo by k prokluzu. Onen „dokonale hladký“ povrch je tedy opět pouze idealizovanou představou pro případ, kdy by se těleso po povrchu druhého pohybovalo stále konstantní rychlostí a nebylo by žádnou silou brzděno.

3.2 Poloha hmotného bodu v souřadném systému

3.2.1 Polohový vektor

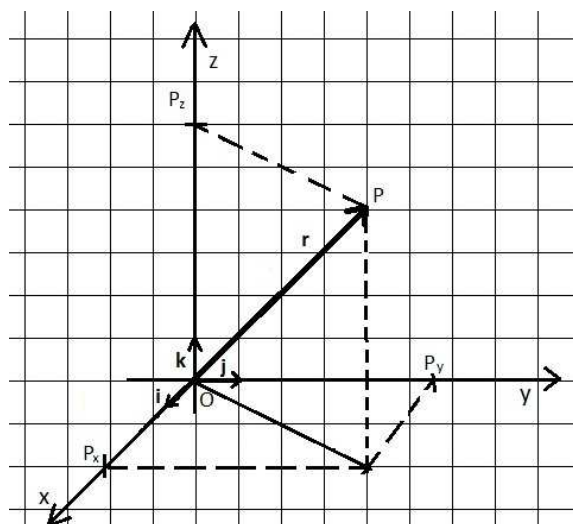
Každý bod v prostoru lze nějak matematicky charakterizovat pomocí jeho polohového vektoru, též průvodiče nebo radiusvektoru. Základem je zvolit si nějakou souřadnou soustavu (v $\mathbb{R}^3$), ve většině případů volíme ortonormální vztažnou soustavu, kde jednotkové báze vektory $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ve směru souřadnicových os tvoří v tomto pořadí pravotočivý systém – názorně si ji můžeme představit jako kout nějaké klasické místnosti – roh jako počátek souřadného systému, hrany jako souřadnicové osy a jednotky, např. 1 dm, jakožto velikosti báze vektorů ve směru těchto hran. Podle kapitoly 2.3.3 již víme, jak vyjádřit souřadnice bodu (fyzikálně hmotného bodu) v takovémto systému souřadnic.

Polohovým vektorem nazveme vektor, který má počátek ve středu O (počátku) souřadnicového systému (našem rohu) a jeho koncový bod splývá v místě polohy hmotného bodu, označme jej P. Pokud se přeneseme do souřadnicového vyjádření, pro radiusvektor $\mathbf{r}$ platí:

$$\mathbf{r} = \mathbf{P} - \mathbf{O} = [P_x, P_y, P_z] - [0; 0; 0] = (P_x, P_y, P_z)$$

A tedy poloha hmotného bodu P je v tomto souřadném systému dána jako $\mathbf{P} = \mathbf{O} + \mathbf{r}$.

Vše jednoduše ukazuje následující obrázek.

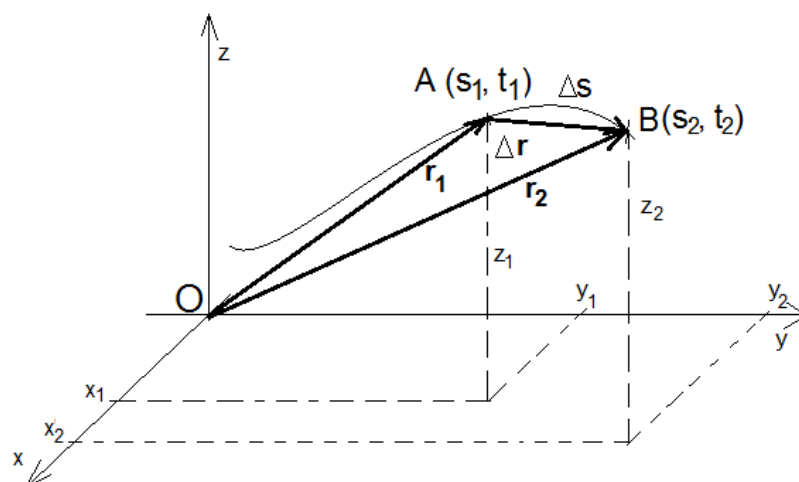


Obr. 17: Polohový vektor $\mathbf{r}$ hmotného bodu P

3.2.2 Polohový vektor hmotného bodu v pohybu

Nyní se zabývejme případem, kdy se hmotný bod pohybuje. Prakticky každé vyjádření pohybu (kinematiky) hmotného bodu začíná v kartézské souřadné soustavě, a to vynesemím jeho trajektorie, tedy poloh, kterými tento HB prošel za nějaký čas.

Již víme, že radiusvektor je vektor mezi počátkem soustavy souřadnic a hmotným bodem. Pokud tedy HB koná pohyb, i radiusvektor obecně mění svůj směr a velikost. Na obrázku jsou znázorněny dvě polohy průvodiče hmotného bodu jako vektory $\mathbf{r}_1 = \mathbf{A} - \mathbf{O}$ v čase t_1 a jako $\mathbf{r}_2 = \mathbf{B} - \mathbf{O}$ v čase t_2 . Poloha hmotného bodu P (viz obr. 9) tedy závisí na čase, tzn. každá souřadnice p_x , p_y , p_z závisí (spojitě) na čase (jsou funkcí času), zapisujeme jako $P_x = P_x(t)$, $P_y = P_y(t)$ a $P_z = P_z(t)$, použijeme-li značení polohy hmotného bodu jako $\mathbf{P} = [x, y, z]$, potom $x = x(t)$, $y = y(t)$ a $z = z(t)$. Tedy radiusvektor $\mathbf{r}$ je **spojitou vektorovou funkcí času**, tedy $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. [6]



Obr. 18: Polohový vektor jakožto funkce času

Skalární argumenty s_1, s_2 udávají délku trajektorie (tj. dráhu) hmotného bodu v poloze A a B od nějakého zvoleného bodu, od kterého začínáme měřit čas. Jejich rozdílem Δs je délka (zde obloukového) úseku trajektorie mezi těmito body.

Změna polohového vektoru je popsána vektorem $\Delta \mathbf{r}$ jakožto rozdílem polohových vektorů v čase t_1 a t_2 , tedy $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Pro polohu hmotného bodu v místě (bodě) B trajektorie potom platí:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \Delta \mathbf{r} = \mathbf{O} + \mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{r}$$

Pro vektor $\Delta \mathbf{r}$ též platí $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$.

Pokud chceme měřit průměrnou rychlost mezi těmito úseky za časový interval $\Delta t = t_2 - t_1$, potom platí:

$$\text{průměrná rychlost} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Budeme-li však tento interval zjemňovat, hodnota průměrné rychlosti se změní v okamžitou, výraz pro přírůstky se změní v diferenciály:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Přírůstek okamžité rychlosti má tedy směr tečny ke křivce.

Nyní se podívejme na změnu polohového vektoru v čase, tedy. Cítíme, že budeme-li zjemňovat časový interval, velikost přírůstku změny vektoru se bude více a více blížit velikosti přírůstku dráhy. V diferenciálním tvaru se bude velikost elementu $|d\mathbf{r}|$ rovnat elementu ds , což je ovšem skalár. Abychom zachovali vektorový tvar, umístíme v tečném směru jednotkový vektor $\boldsymbol{\tau}_0$, a tedy: $\boldsymbol{\tau}_0 ds = d\mathbf{r}$. Proto pro okamžitou rychlost ve vektorovém tvaru pomocí radiusvektoru platí:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

Rozepsané do složek vektoru $\mathbf{v}$ pro $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tedy:

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

Pro velikost vektoru okamžité rychlosti z vlastnosti eukleidovské metriky platí:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

3.3 Násobení vektoru reálným číslem

Příklady násobku vektoru nějakým reálným číslem je ve fyzice nespočet. Níže je výběr pár těch „nejočividnějších“ fyzikálních zákonů, ve kterém aplikujeme přímo násobek vektoru nějakým koeficientem.

3.3.1 II. Newtonův pohybový zákon

Z hlediska vektorového počtu je zákon síly velmi jednoduchým příkladem součinu skaláru a vektoru.

Jak jsme zmínili výše, vztah mezi silou $\mathbf{F}$ a jejím účinkem na těleso – zrychlením $\mathbf{a}$ – je dán Newtonovým zákonem síly:

„Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.“ ([8], s. 13)

Dá se přeložit následovně:

„Velikost zrychlení (změny pohybu) tělesa je přímo úměrná velikosti výslednice (reálných) sil působících na toto těleso a nepřímo úměrná hmotnosti tělesa. Směr zrychlení je totožný se směrem síly, která změnu pohybu vyvolala.“

Upozorníme, že tento zákon platí v inerciální vztažné soustavě, tedy v soustavě, která se nepohybuje se zrychlením.

Pozn.: Země ve skutečnosti mimo jiné vykonává rotační pohyb kolem své osy, jedná se tedy o neinerciální vztažnou soustavu. Vzhledem k tomu, že naše rozměry jsou zanedbatelné vůči rozměrům Země, lze soustavu spojenou se Zemí v mnoha případech považovat za inerciální.

Podle zákona síly tedy platí:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

Všimněme si, že v tomto případě je nezávisle proměnnou právě vektor síly $\mathbf{F}$, tedy výsledné zrychlení (kinematika) je způsobena působením síly (dynamika), proto je formulace v tomto tvaru.

Malou úpravou však dostáváme:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

V praxi skutečně v případě startu se letadla cítíme tlačení do sedačky, v případě přistávání přepadáváme dopředu. Avšak při přímočarém letu konstantní rychlostí se můžeme po palubě volně pohybovat, jako kdybychom byli doma.

Pro výslednici sil dále platí princip superpozice, celkový tvar 2. Newtonova zákona pak nabývá tvaru:

$$m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}$$

Vidíme tedy, že pokud na nějaké těleso o hmotnosti m_1 působíme silou $\mathbf{F}$, získá zrychlení $\mathbf{a}_1$. Pokud však toutéž silou působíme na těleso o větší hmotnosti m_2 , získá zrychlení $\mathbf{a}_2$, které ovšem bude menší než $\mathbf{a}_1$.

Pozn.: Tento zákon předpokládá neměnnost hmotnosti (konstantní hmotnost), jak však uvidíme v další podkapitole, je prakticky speciálním případem obecného tvaru II. Newtonova pohybového zákona.

Interpretace téhož zákona by však v neinerciální vztažné soustavě vypadala následovně:

$$m\mathbf{a}' = \sum \mathbf{F} + \sum \mathbf{F}^*$$

Tedy výsledné zdánlivé (relativní) zrychlení $\mathbf{a}'$ je dáno součtem reálných sil a sil setrvačných (nereálných), tedy takových, které v této soustavě (tj. soustavě se zrychlením) vznikají. Jejich příkladem je třeba síla odstředivá a Coriolisova síla, o které se zmiňujeme u fyzikální aplikace vektorového součinu.

3.3.2 Hybnost tělesa

Z praxe si jistě dokážeme představit, že tělesu o větší hmotnosti musíme dodat větší sílu, aby se dalo do pohybu o rychlosti $\mathbf{v}$, než tělesu o menší hmotnosti. A naopak, těleso s větší hmotností pohybující se rychlostí $\mathbf{v}$ musíme zabrzdit větší silou než těleso s menší hmotností pohybující se téže rychlostí. Tuto vlastnost, spojitost mezi hmotností a rychlostí tělesa, je možné popsat pomocí hybnosti $\mathbf{p}$. Jedná se o vektor, který má

stejný směr jako rychlost pohybujícího se tělesa $\mathbf{v}$. Experimenty ukazují, že je hybnost přímo úměrná jeho rychlosti i hmotnosti, tedy:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Z I. Newtonova zákona také víme, že přirozeným stavem tělesa je klid nebo pohyb rovnoměrný přímočarý. Za změnu tohoto stavu je zodpovědná síla, která udělí zrychlení, způsobí tedy změnu rychlosti v čase. A protože je vztah mezi hybností a rychlostí tělesa dán pouhou konstantou úměrnosti m , tedy i změna hybnosti v čase popisuje průměrnou sílu, která za časový úsek na těleso působila:

$$\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = \bar{\mathbf{F}}$$

Pokud budeme časový úsek, ve kterém vyšetřujeme změnu tohoto pohybu, stále zmenšovat, budeme umět stále přesněji určit sílu $\mathbf{F}$, hovoříme o okamžité změně pohybu v čase. A k vyjádření této skutečnosti nám pomůže derivace. Docházíme pak k obecnější formulaci II. Newtonova zákona:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum \mathbf{F}$$

Tedy: „Časová změna hybnosti je rovna výslednici působících sil.“

3.3.3 Archimedův zákon

Formulaci Archimedova zákona známe ze základní školy:

„Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno vztlakovou silou, která je svou velikostí rovna tíze kapaliny, kterou vytlačila ponořená část tělesa.“

$$\mathbf{F}_{vz} = \rho_K V_T \mathbf{g}$$

Jedná se opět o příklad násobení vektoru (tíhové síly) skaláry (objemem ponořené části tělesa a hustotou kapaliny).

3.3.4 Stokesův vztah pro odpor prostředí

Nachází-li se těleso tvaru koule o poloměru r v nepříliš rychle proudící tekutině (laminární proudění), vlivem vnitřního tření kapaliny na něj působí odporová síla $\mathbf{F}$, která má směr laminárního proudění daného vektorem rychlosti $\mathbf{v}$ a jejíž vztah je dán jako:

$$\mathbf{F} = 6\pi\eta r\mathbf{v},$$

kde η je dynamická viskozita, která charakterizuje vnitřní tření tekutiny. [17]

3.3.5 Klidové (statické) tření

Následující řádky jsou parafrází z knihy Halliday, Resnick, Walker ze strany 120. [7]

Chtějme posunout nějaké těleso po nedokonale hladké podložce působením síly $\mathbf{F}$. Než jej uvedeme do klouzavého pohybu, cítíme, že musíme překonat nějakou třecí sílu. Experimenty dokazují, že má tato síla následující vlastnosti:

1. Než těleso uvedeme do klouzavého pohybu, musíme překonat statickou třecí sílu, jejíž vektor $\mathbf{F}_s$ má stejnou velikost jako průmět působící síly $\mathbf{F}$ do podložky a má opačný směr než vektor síly $\mathbf{F}$.
2. Tato třecí síla dosahuje svého maxima, které je dáno jako:

$$\mathbf{F}_{s,\max} = f_s \mathbf{N},$$

kde bezrozměrnou veličinu f_s nazýváme koeficientem statického tření a $\mathbf{N}$ značí vektor tlakové síly od podložky.

3. Jakmile silou $\mathbf{F}$ překonáme tuto mezní hodnotu, klesne prakticky skokem třecí síla na hodnotu $\mathbf{F}_t$ (viz dále).

3.3.6 Amontonův–Coulombův zákon pro smykové tření

Nyní pokračujeme případem 3. Při posouvání tělesa po podložce cítíme, že podle povrchu styčných ploch se nám sunutí daří lépe či hůře. Tento jev je způsoben především nerovností obou styčných ploch – při vzájemném posouvání do sebe tyto „hrbolky“ naráží a deformují se. Tato „zábrana“ posouvání je reprezentována třecí silou F_t .

Zkoumáním tření se zabýval koncem 17. století francouzský fyzik G. Amonton. Jeho výsledky ověřil na konci 18. století Ch. Coulomb formulací zákona smykového tření:

$$F_t = \mu N,$$

který říká, že třecí síla je přímo úměrná normálové (kolmé) síle, kterou je těleso přitlačováno k podložce (styčné ploše). Bezrozměrnou konstantu úměrnosti μ nazýváme koeficient smykového tření, který zejména závisí na jakosti styčných ploch (hladkost, drsnost ...). Obecně je funkcí rychlosti (tj. závisí na rychlosti) posouvání, ale při nízkých rychlostech je tato závislost tak málo zřetelná, že se k ní nepřihlíží. Co je ale zajímavé, je, že tento zákon říká, že třecí síla nezávisí na rozměrech styčných ploch! Koeficient smykového tření se měří pro jednotlivé povrchy experimentálně. Záleží také na tom, zda jsou povrchy mokré nebo suché. [6]

3.3.7 III. Newtonův pohybový zákon

Protože v dalších případech narazíme na síly akce a reakce, je dobré se s nimi seznámit prostřednictvím 3. Newtonova zákona. Důvod, proč jej řadíme to této podkapitoly, je ten, že se jedná o jednoduchý tvar násobku vektoru skalárem. Skalár je v tomto případě pouhá -1 .

„Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem; sive: corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.“ ([8], s. 14)

„Každá síla (akce) vyvolává stejně velkou reakci, neboli každá dvě tělesa na sebe působí stejně velkými silami opačného směru (silami akce a reakce). Tyto síly současně vznikají i zanikají.“

To znamená, že pokud je těleso 1 k tělesu 2, tak i těleso 2 je přitahováno touž silou k tělesu 1, akorát opačně orientovanou:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

Ačkoliv síly mají stejnou velikost a opačný směr, jejich účinek se nevyruší. Důvod je jednoduchý – každá z nich působí na jiné těleso.

3.4 Užití jednotkového vektoru

3.4.1 Newtonův gravitační zákon

Z každodenní zkušenosti víme, že jsou tělesa přitahována k Zemi. Podle zákona akce a reakce však i tělesa, která jsou přitahována k Zemi, musí působit na Zem stejnou silou, ale opačného směru, tzn., že i tato tělesa přitahují Zemi stejnou silou, jako ona je. Vlastnosti těchto gravitačních sil popsal Newton následovně, cit. ze zdroje [18]:

„Každá dvě tělesa se vzájemně přitahují stejně velkými gravitačními silami opačného směru. Velikost gravitační síly pro dvě stejnorodá tělesa tvaru koule je přímo úměrná součinu jejich hmotností a nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti jejich středů.“

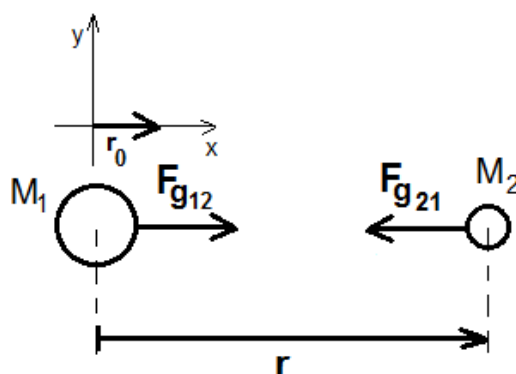
To znamená:

$$F_{g,12} = F_{g,21} = G \frac{M_1 M_2}{r^2}$$

Pozn.: Index 12 značí sílu, kterou je přitahováno těleso 1 k tělesu 2, tedy sílu, kterou působí těleso 2 na těleso 1, a naopak.

G značí gravitační konstantu (v českých učebnicích bývá označována jako κ). Její hodnotu stanovil v 18. století Henry Cavendish (1731-1810) na hodnotu $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$.

Tento zákon je odvozený pro dvě stejnorodá tělesa tvaru koule. Řadu let se Newton zabýval otázkou, zda tento zákon je platný i pro tělesa obecného tvaru. V průběhu této dlouhé doby zkonstruoval integrál, aby dokázal, že tento zákon pro taková tělesa obecně neplatí. Avšak pokud jsou rozměry takových nepravidelných těles, zanedbatelné vůči jejich vzdálenosti, tzn. nahradit je za hmotné body, je možné gravitační zákon na tento případ použít.



Obr. 19: Pro popis gravitačního zákona ve vektorovém tvaru

Vidíme, že zákon je zapsán ve skalárním tvaru, určuje tedy pouze velikost gravitační síly. Ovšem gravitační síla, jakožto každá síla, je reprezentována i její orientací. V gravitačním zákonu se objevují skalární veličiny, ovšem vzdálenost r můžeme charakterizovat směrem. Ten zavedeme tak, že zákon vynásobíme jednotkovým (normovaným) vektorem $\mathbf{r}_0$ polohového vektoru $\mathbf{r}$ středu tělesa 2 vůči středu tělesa 1 (soustavu souřadnic jsme tedy umístili do středu tělesa 1, které sílu vyvolává), jehož směr si objasníme níže. Gravitační zákon pak pro sílu, kterou působí těleso 1 na těleso 2, pak nabývá tvaru:

$$\mathbf{F}_g = -G \frac{M_1 M_2}{r^2} \mathbf{r}_0 = -G \frac{M_1 M_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = -G \frac{M_1 M_2}{r^3} \mathbf{r}$$

Zvolme vztažnou soustavu s tělesem, které gravitační sílu vyvolává (těleso 1) a určíme směr kladné osy bázovým vektorem $\mathbf{r}_0$ ve směru od tělesa 1 k tělesu 2. Gravitační síla tělesa 1 je síla přitažlivá, tzn., že působí proti tomuto tělesu, ve zvolené vztažné soustavě je tedy záporně orientovaná. Zvolené znaménko mínus a směr radiusvektoru $\mathbf{r}$ (tělesa 2 vůči tělesu 1) tedy ve výsledku dává zápornou hodnotu, což koresponduje.

Pozn.: Ačkoliv je to více než zřejmé, doplníme, že zvolený polohový vektor $\mathbf{r}$ má velikost vzdálenosti mezi tělesy $\mathbf{r}$.

Protože se jedná o síly akce a reakce, pro gravitační sílu, kterou působí těleso 2 na těleso 1, ze zákona akce a reakce ve stejné vztažné soustavě platí:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \rightarrow \mathbf{F}_{21} = G \frac{M_1 M_2}{r^2} \mathbf{r}_0$$

Podle 2. Newtonova zákona zemská gravitační síla udělí tělesům pohybujícím se v jejím gravitačním poli zrychlení. Hodnota tohoto zrychlení je implicitně skryta v Newtonově gravitačním zákonu pro zemské těleso (o hmotnosti M_1) a těleso o hmotnosti M_2 pohybující se v jejím gravitačním poli, a to následujícím způsobem. Pokud vztáhneme tuto sílu na jednotkovou hmotnost tělesa v gravitačním poli tělesa o hmotnosti M_1 , tedy $M_2 = 1$ kg, potom vyjádříme intenzitu gravitačního pole $\mathbf{K}$ tělesa o hmotnosti M_1 . Pokud provedeme rozměrovou analýzu či se podíváme na 2. Newtonův zákon, zjistíme, že tato hodnota musí mít rozměr zrychlení, a tedy:

$$\mathbf{K} = -G \frac{M_1}{r^2} \mathbf{r}_0$$

Pro Zemi tuto intenzitu nazýváme gravitační zrychlení Země, ozn. $\mathbf{g}$. Abychom se zbavili nepříjemného mínus, zavedeme jednotkový vektor $\mathbf{g}_0$ se směrem opačným k radiusvektoru $\mathbf{r}_0$:

$$\mathbf{g} = G \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2} \mathbf{g}_0$$

Kde h značí vzdálenost středu tělesa o jednotkové hmotnosti od Země. Pro gravitační sílu Země, která působí na těleso o hmotnosti m tedy po dosazení dostáváme:

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$$

Je dobré si uvědomit, že váha tělesa (tíhová hmotnost) není totéž co jeho hmotnost (setrvačná hmotnost)! Udělejme myšlenkový experiment. Z předchozí rovnice vidíme, že pokud se člověk o hmotnosti m nachází na Zemi, působí na něj gravitační síla

zrychlením g a silou F_g . Pokud by se však stejný člověk téže hmotnosti nacházel na Měsíci, kde je gravitace menší, bude k Měsíci přitahován menší silou než na Zemi. Jinými slovy pokud stoupneme na klasickou váhu na Zemi, bude ukazovat jinou hodnotu než na Měsíci.

Hmotnost tělesa tedy není něco hmatatelného, můžeme pouze říct, že je to charakteristika tělesa, která udává poměr mezi silou působící na toto těleso a zrychlením, které mu síla uděluje. Přesnější definici vyslovit nelze. Hmotnost v přirozeném stavu (klid nebo rovnoměrný přímočarý pohyb) nepocítujeme, lze ji „fyzikálně vnímat“ jedině tak, že budeme urychlovat různě hmotné objekty. [HRW]

3.4.2 Coulombův zákon

Tento zákon formuloval v roce 1785 [] Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806). Jedná se o analogický tvar Newtonova gravitačního zákona pro dvě stacionární (klidné) elektricky nabitě bodové částice (nebo nabitá kulová tělesa) ve vakuu s náboji Q_1 a Q_2 . Je-li vzdálenost mezi těmito částicemi (mezi středy kulových nabitých těles) r , pak jejich vzájemná interakce je popsána elektrostatickou silou F_e , jejíž velikost je dána:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2}$$

Konstanta ϵ_0 se nazývá permitivita vakua, jejíž hodnota je $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$.

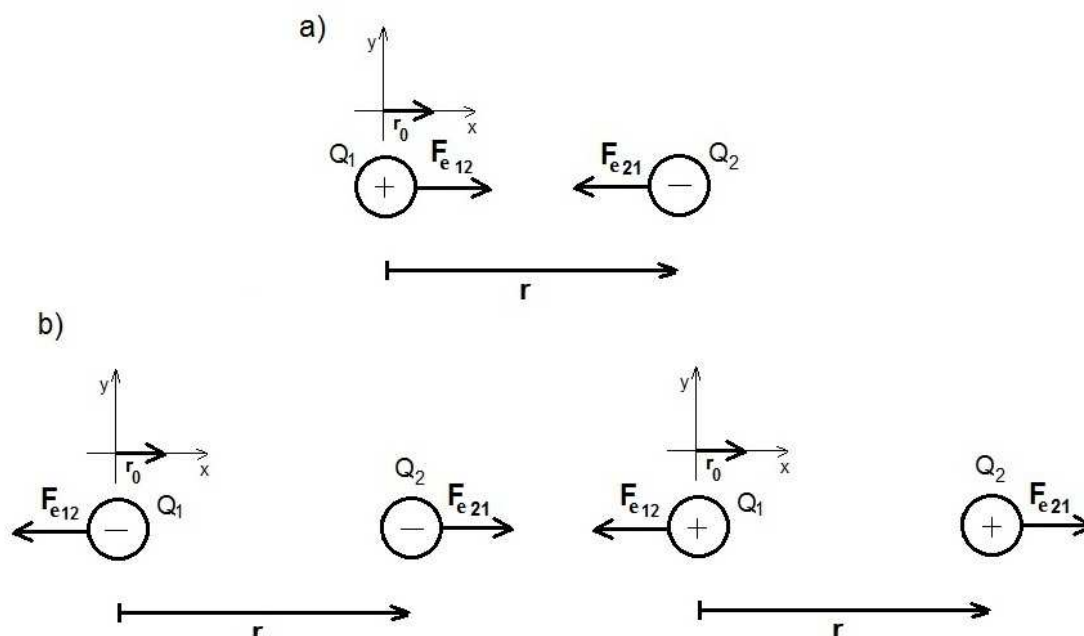
Absolutní hodnoty mají v tomto případě smysl – elektrický náboj může být kladný nebo záporný.

Jedná se opět o sílu, kterou je přitahována (odpuzována) jedna částice druhou. Stejně jako v případě gravitačního zákona jsou i coulombické síly akční a reakční povahy.

Při vektorové formulaci tohoto zákona můžeme rozlišit dva případy – působení stejně nabitých částic a opačně nabitých částic.

Obrázek níže používá stejný popis jako u gravitačního zákona, tedy částice o náboji Q_1 uděluje částici Q_2 zrychlení popsané silou F_{e21} , která směřuje v případě a) proti částici,

která sílu vyvolala. V souřadné soustavě, jejíž počátek umístíme do náboje Q_1 , má tato síla opačný směr.



Obr. 20: Působení různě nabitých nábojů

Pro určení vektorového tvaru Coulombova zákona postupujeme stejně jako v případě gravitačního zákona pomocí radiusvektoru $\mathbf{r}$, který vyjadřuje polohu druhého náboje vůči prvnímu. Protože však přitažlivé elektrostatické síly působí mezi opačně nabitými částicemi, znaménkem mínus již nenásobíme – to nám nahradí součin kladného a záporného náboje:

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \mathbf{r}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \mathbf{r}$$

Ověřme, že tento zápis koresponduje i s případem b), kdy experimenty prokazují, že mezi stejně nabitými bodovými částicemi působí odpudivé síly. Odpudivá síla má vzhledem ke stejně zvolenému souřadnému systému jako v případě a) kladný směr. Součin stejných znamének nábojů dává znaménko plus a vektor $\mathbf{r}$ je orientován také kladně, dosadíme-li do vektorového tvaru Coulombova zákona, vidíme, že vše souhlasí.

3.5 Skládání (superpozice) vektorů

3.5.1 Vektor relativní rychlosti

Pokud se v inerciální soustavě pohybují dvě tělesa s rychlostmi $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ proti sobě, lze se z hlediska relativity pohybu na tento případ dívat také ze soustavy vztažené s jedním z těles. To je potom vůči této vztažné soustavě v klidu, ale proti němu se blíží druhé těleso, které má relativní rychlost nikoliv $\mathbf{v}_2$, ale $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. Znaménko mínus je opodstatněné – vektory rychlostí jsou vůči sobě původně opačně orientovány, jejich rozdíl je tedy větší než původní vektory rychlostí.

3.5.2 Součet sil – silový diagram

Pracujme s představou, že na nějaké těleso (HB) působí trojice sil. Z druhého Newtonova pohybového zákona pro celkové zrychlení plyne:

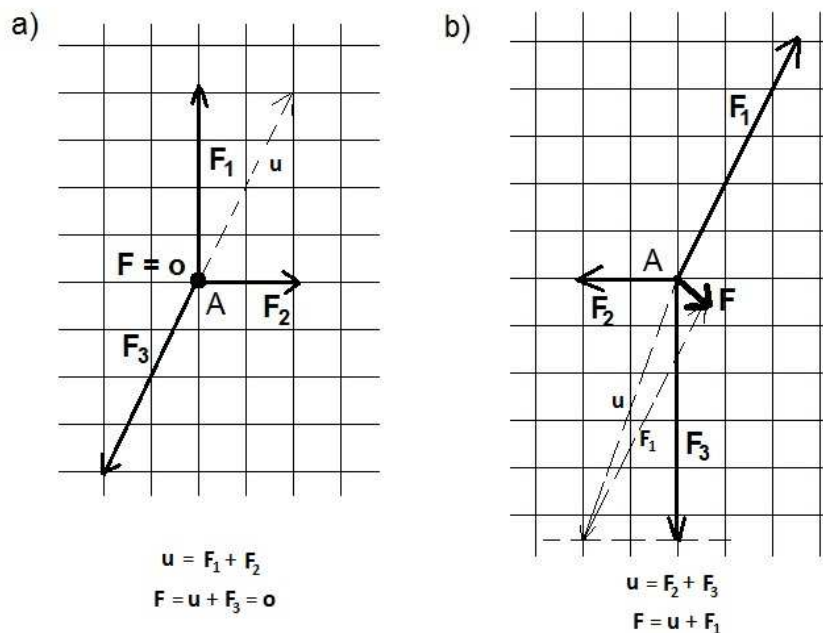
$$m\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_i$$

Mohou nastat dva případy: výslednice sil bude rovna nulovému vektoru, nebo naopak bude nenulový vektor. V prvním případě by se účinek všech sil vyrušil, to znamená, že by se těleso nepohybovalo se zrychlením, tedy konalo by buď rovnoměrný přímočarý pohyb, nebo by bylo v klidu. Ve druhém případě by se těleso pohybovalo se zrychlením ve směru výslednice síly $\mathbf{F}$.

Z příkladu je vidět, že zákon setrvačnosti je vlastně speciálním případem zákona síly. Uvážíme-li, že je těleso v klidu nebo setrvává rovnoměrnému v pohybu ve stejném směru, pro celkovou výslednici sil v takovém případě platí:

$$\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$$

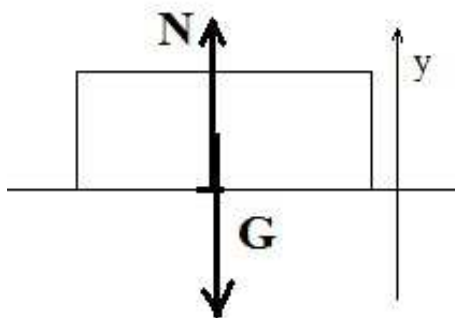
To tedy znamená, že i výsledné zrychlení je nulovým vektorem (na obr. 11 případ a).



Obr. 21: Skládání sil - a) výsledkem je nulový vektor 0, b) výsledkem je nenulový vektor F

3.5.3 Součet dvou sil – vodorovná položka

Uvažujme, že těleso o hmotnosti m je položené na vodorovné podložce (např. stole). Na takové těleso působí jeho tíhová síla G směřující z jeho těžiště kolmo na horizontální rovinu Země, tedy i na vodorovnou podložku. Kdyby však na těleso působila pouze tato síla, těleso by neudrželo svůj tvar a zdeformovalo by se do podložky. Musí zde tedy existovat nějaká síla, která působí na totéž těleso proti jeho tíhové síle. Touto silou je normálová tlaková síla od podložky N . Pro zjištění její velikosti postupujeme následovně.



Obr. 22: Síly působící na těleso v klidu

Protože je těleso v klidu, jeho zrychlení bude nulové, podle 2. Newtonova zákona platí:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{0} = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{N} + \mathbf{G}$$

Protože obě síly působí ve vertikálním směru, můžeme zvolit pouze jednu souřadnou osu y do které síly rozložíme. Pro velikost normálové síly zřejmě platí:

$$N - G = 0 \rightarrow N = G$$

Tento příklad může „zavánět“ silami akce a reakce – jedná se o stejně velké síly opačného směru. Úskalí je ale v tom, že obě tyto síly působí na stejné těleso, jejich účinek se tak ruší.

Jestliže bychom chtěli nalézt sílu reakce na tíhovou sílu tělesa $\mathbf{G}$, musíme se podívat na jejího původce, to je, mezi kterými tělesy tato síla působí. V další podkapitole se blíže dozvíme o gravitační interakci. Tíhová síla $\mathbf{G}$ je interakcí mezi tělesem a Zemí, pokud je tedy $\mathbf{G}$ akční silou, kterou působí Země na těleso, potom reakcí musí být síla $-\mathbf{G}$, tedy síla, kterou působí těleso na Zemi.

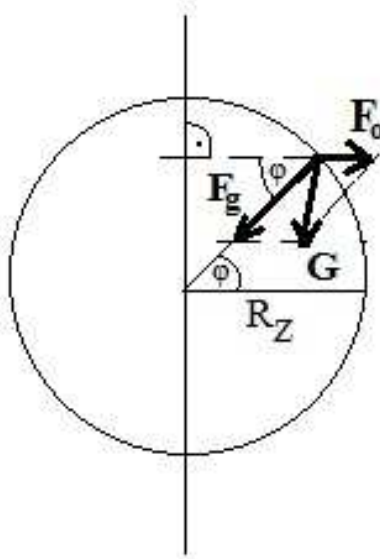
Nyní podobně hledejme reakci k normálové síle od podložky. Tato síla je interakcí mezi podložkou a tělesem. Pokud jako akci uvažujeme sílu $\mathbf{N}$, kterou působí podložka na těleso, pak reakční silou bude opět stejně velká, ale opačně orientovaná síla $-\mathbf{N}$, kterou působí těleso na podložku.

3.5.4 Tíhová síla – součet sil v neinerciální vztažné soustavě

Již jsme si řekli, že v neinerciálních vztažných soustavách působí setrvačné síly. Pokud se pohybujeme na Zemi, která rotuje, na každém místě na jejím povrchu na nás bude kromě gravitační síly $\mathbf{F}_g$ působit také (setrvačná) odstředivá síla $\mathbf{F}_s$. Jejich superpozicí vznikne vektor tíhové síly $\mathbf{G}$, který má obecně jiný směr a velikost (viz obr.), platí:

$$m\mathbf{g}' = \mathbf{G} = \sum \mathbf{F} + \sum \mathbf{F}^*$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_s$$



Obr. 23: Tíhová síla jako vektorový součet gravitační síly a síly odstředivé

Protože všechny síly působí na těleso o hmotnosti m , pro tíhové zrychlení $\mathbf{g}'$ tedy platí:

$$m\mathbf{g}' = m\mathbf{g} + m\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{g}' = \mathbf{g} + \mathbf{s}$$

Protože se každé místo na Zemi pohybuje se stejnou úhlovou, ale jinou obvodovou rychlostí, chápeme, že tíhová síla závisí na zeměpisné šířce φ . Největší hodnoty nabývá na rovníku a nejmenší (nulové) na pólech. Pokud vezmeme v potaz vysvětlení tíhové hmotnosti, z vlastností tíhové síly vyplývá, že bychom na stejné klasické váze vážili o něco méně na rovníku a o něco více na pólech.

3.5.5 Rozklad polohového vektoru

Vraťme se k obrázku 9. V kapitolách 2.3.3 a 2.3.4 jsme se zabývali mj. rozložením vektoru do jeho složek. Tento postup nyní uplatníme i v případě polohového vektoru $\mathbf{r}$. Na obrázku vidíme jeho souřadnice jako (P_x, P_y, P_z) , tedy koeficienty lineární kombinace báзовých vektorů, zde značených jako $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Polohový vektor $\mathbf{r}$ tedy můžeme zapsat jako:

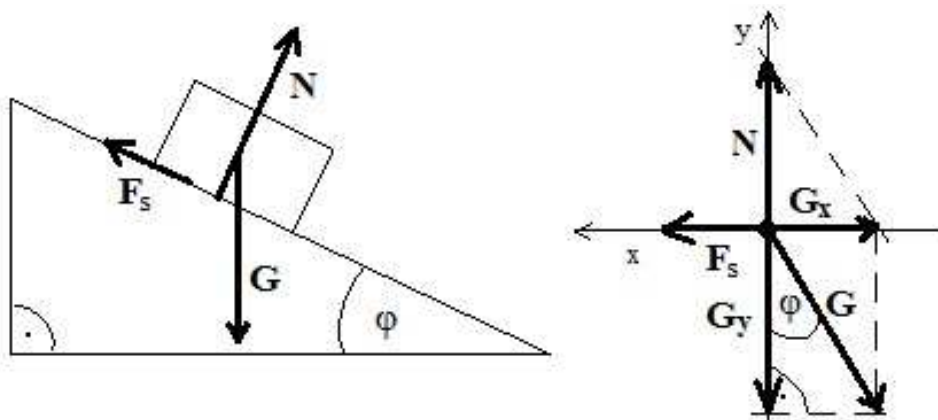
$$\mathbf{r} = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k},$$

kde $P_x\mathbf{i}$, $P_y\mathbf{j}$ a $P_z\mathbf{k}$ jsou složky polohového vektoru.

3.5.6 Rozklad sil – nakloněná rovina

Chceme-li vektor rozložit, hledáme dva takové vektory (dvě vektorové složky), které leží v daných směrech (většinou kolmých souřadnicových os) a jejichž složením (vektorovým součtem) dostaneme zadaný vektor.

Jak bylo řečeno, za prvního, kdo rozložil vektor síly do dvou kolmých složek, se pokládá Simon Stevin (16. stol.). Pracoval s nakloněnou rovinou. My se jím inspirujeme a zamyslíme se nad silovým diagramem tělesa ležícího v klidu na nakloněné rovině.



Obr. 24: Rozklad sil tělesa ležícího v klidu na nakloněné rovině

V tomto případě na těleso působí 3 síly, které své účinky ruší (při superpozici těchto vektorů vyjde nulový vektor). Se všemi silami jsme se seznámili výše – jedná se o sílu tíhovou G , tlakovou normálovou od podložky N a sílu statického tření F_s . Podle zákona síly vektorově a posléze ve směrech souřadnicových os píšeme:

$$ma = 0 = \sum F_i = N + G + F_t$$

$$x: ma_x = \sum F_x = F_t - G_x = f_s N - mg \sin \varphi = 0$$

$$y: ma_y = \sum F_y = N - G_y = N - mg \cos \varphi = 0$$

Z rovnic by se dále dal vyjádřit koeficient statického tření.

Názorně vidíme, že při rozkladu síly $\mathbf{G}$ do souřadnicových os využíváme toho, že síly v těchto souřadnicových osách mají jednu složku nulovou, jejich velikost je tedy rovna nenulové složce.

Pro vektor síly $\mathbf{G}$ platí:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_x + \mathbf{G}_y$$

Také je vidět, že se účinky dvojic sil složky $\mathbf{G}_x$ s $\mathbf{F}_s$ a složky $\mathbf{G}_y$ s $\mathbf{N}$ vyruší.

Pokud by těleso klouzalo po nakloněné rovině nedokonale hladkého povrchu, místo síly statického tření by proti jeho pohybu působila síly dynamického (smykového) tření, která by však nevyrušila účinek síly normálové a tíhové – těleso by se potom pohybovalo se zrychlením ve směru osy x .

V případě dokonale hladké podložky bychom tření mohli zanedbat, výsledná síla by tedy byla dána pouze superpozicí síly normálové a tíhové, ve zvolené souřadné soustavě by tato výslednice měla směr podél kladné části osy x .

3.6 Skalární součin

3.6.1 Práce

Pokud budeme chtít těleso posunout z jednoho místa do druhého po přímé dráze, musíme na něj působit silou. Je nám však jasné, že se účinek této síly (ve smyslu posunutí) bude měnit v závislosti směru této síly. Pokud budeme touž silou působit ve směru rovnoběžném s dráhou, po které těleso suneme, dosáhneme posunutí lehčeji, než kdybychom na těleso působili silou v jiném směru. Žádného posunutí po zvolené (přímé) dráze nedosáhneme tehdy, pokud na těleso budeme působit silou kolmou k této dráze.

To nám ovšem velmi známě připomíná vztah pro skalární součin dvou vektorů v závislosti na jejich velikosti a sevřeném úhlu φ . Není proto žádným překvapením, že je dráhový účinek síly po přímé dráze – práce síly (po přímé dráze) – roven skalárnímu součinu vektoru síly $\mathbf{F}$ a dráhy dané polohovým vektorem $\mathbf{s}$ ve směru posunutí z výchozího místa A do místa B, tedy:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F s \cos \varphi$$

Všimáme si, že fyzikální veličina práce je veličina skalární a může nabývat jak kladných, tak záporných hodnot (vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic).

3.6.2 Výkon práce

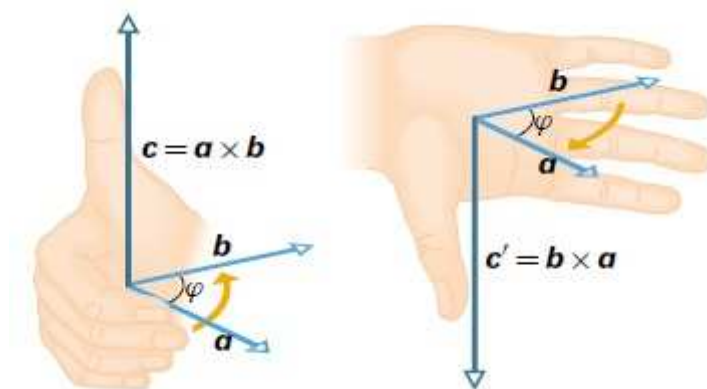
Pokud budeme vyšetřovat výkon nějaké práce, bude nás zajímat, za jak dlouho práce proběhla. Budeme vyšetřovat přesné hodnoty – výše jsme se lehce dotkli matematického aparátu, která s touto „přesností okamžiku“ souvisí – s derivací. Budeme-li tedy vyšetřovat vykonanou práci za časový úsek dt (infinitesimální časový úsek – diferenciál), potom po dosažení předchozího vztahu platí:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d(\mathbf{F} \cdot \mathbf{s})}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

3.7 Vektorový součin

Objasnili jsme si vlastnosti vektorového součinu v obecné dimenzi. Jak bylo řečeno, ve fyzice se setkáváme s vektorovým součinem dvou vektorů (z definice vektorového součinu tedy ve trojrozměrném prostoru).

Z vlastnosti 4. víme, že uspořádaná trojice vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ v tomto pořadí tvoří pravotočivou bázi. Ve fyzice si při určení, zda je taková soustava pravotočivá nebo levotočivá, pomáháme **pravidlem pravé ruky**. Jedná se o postup, kdy všechny síly posuneme do jednoho působíště, kolmý vektor „uchopíme“ pravou rukou tak, aby prsty směřovaly od prvního vektoru ve vektorovém součinu ke druhému „cestou“ konvexního úhlu mezi nimi (viz obr. níže). [7]



Obr. 25: Pravidlo pravé ruky [19]

Dále z vlastnosti antisymetrie vektorového součinu pro obecné vektory **a**, **b** ve trojrozměrném prostoru platí:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

A pro ortonormální bázevé vektory **i**, **j**, **k** ve trojrozměrném prostoru plyne:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} &= \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Jak je vidět, vektorový součin je vhodné užít v případě orientované kružnice. Níže je uvedeno pár příkladů, kde se vektorový součin používá.

3.7.1 Pohyb po kružnici

Pokud má hmotný bod konat pohyb po kružnici stále ve stejném směru, musí mít rovina, ve které pohyb koná, stejnou orientaci v prostoru. Tato orientace může být z řečených vlastností vektorového součinu velmi dobře určena prostřednictvím osy kolmé k rovině, ve které hmotný bod pohyb vykonává. Vektorový součin v závislosti na změně vektorů, kterými je určen, mění svou orientaci a velikost právě ve směru této osy.

Kružnice o poloměru r má obvod (délku kruhové trajektorie) $s = 2\pi r$. Pro okamžitou rychlost platí:

$$v = 2\pi \frac{dr}{dt}$$

Vztáhneme-li celý obvod kružnice na jednotkový poloměr, dostaneme úhel $\varphi = 2\pi$ (v radiánech). Ovšem i v tomto případě můžeme měřit okamžitou změnu úhlu za čas dt . Tuto okamžitou změnu nazveme úhlová rychlost:

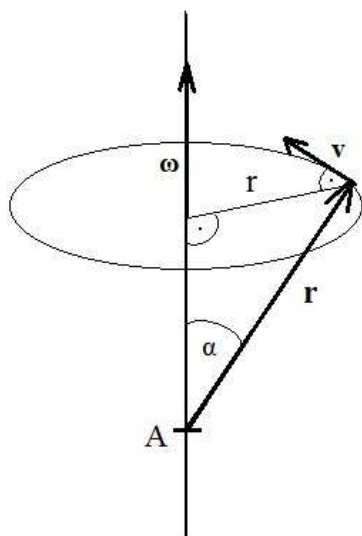
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Mezi úhlovou rychlostí a okamžitou rychlostí platí vztah $v = r\omega$.

Protože je však rychlost vektorovou veličinou, bude vhodné jej zavést do orientovaného pohybu hmotného bodu po kružnici následovně. Víme, že má okamžitá rychlost tečný směr k trajektorii. Zavedením orientovaného úhlu φ klasicky (kladný směr bude směr otáčení proti chodu hodinových ručiček) můžeme zavést vektor středového úhlu $\boldsymbol{\varphi}$ do osy otáčení. Ten narůstá či klesá podle orientace pohybu. Jeho vektor okamžité změny tedy bude rovněž narůstat či klesat podle změny orientovaného pohybu, takto pro vektor $\boldsymbol{\omega}$ tedy platí:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}$$

Problém polohového vektoru $\mathbf{r}$ vyřešíme následovně:



Obr. 26: Kruhový pohyb

Z obrázku je tedy patrné, že:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

což koresponduje s velikostí vektorového součinu:

$$\|\mathbf{v}\| = \|\boldsymbol{\omega}\| \|\mathbf{r}\| \sin \alpha$$

A protože se úhel α nemění, pak:

$$\|\mathbf{v}\| = \|\boldsymbol{\omega}\| r,$$

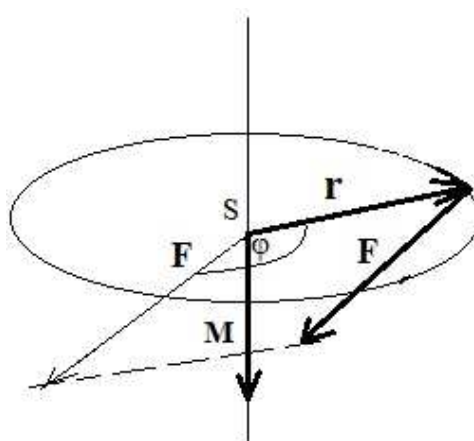
kde r je poloměr kruhové trajektorie.

3.7.2 Moment síly

Představme si, že chceme otevřít dveře. Zkušenost nám říká, že čím dále od osy otáčení (pantů) budeme působit, tím lehčeji nám otevření půjde. Ovšem záleží i na směru, ve kterém síla na dveře působí. Pokud s nimi bude rovnoběžná, žádný účinek to na otevření mít nebude, ovšem pokud bude ve směru kolmém, způsobí otáčení dveří nejlépe. Kvantitativně tuto skutečnost můžeme popsat takto:

$$M = Fr \sin \varphi,$$

kde M je otáčivý účinek síly, tzv. moment síly, r je rameno otáčení, F je působící síla a φ úhel mezi směrem síly a ramenem. Až na funkci sinus vidíme paralelu veličinou práce. Není proto divem, že má moment síly stejný rozměr, ovšem používanou jednotkou je Nm.



Obr. 27: Moment síly

Pro vektorový tvar momentu síly platí:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

kde vektor $\mathbf{r}$ je polohový vektor v rovině otáčení směru od osy s velikostí poloměru otáčivého pohybu.

3.7.3 Coriolisova síla

Jedná se o setrvačnou sílu, která působí v neinerciální vztažné soustavě, která rotuje kolem vlastní osy. Vysvětlíme si ji na příkladu řetízkového kolotoče, který se otáčí v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček) – představme si, že z místa osy otáčení chce po řetězu sešplhat veverka směrem k sedačce. Vlivem toho, že se kolotoč otáčí stejnou úhlovou rychlostí, se místa vzdálenější od osy otáčení pohybují větší obvodovou rychlostí než místa bližší. Při pohybu směrem k sedačce tedy veverku rotace bude stáčet proti směru otáčení kolotoče, tedy po směru hodinových ručiček. Naopak

bude-li chtít po řetězu vyšplhat od sedačky směrem k ose otáčení, půjde z míst o vyšších obvodových rychlostí do nižších, vlivem setrvačnosti ji kolotoč bude naopak stáčet ve směru rotace (proti směru hodinových ručiček).

Pro těleso o hmotnosti m , které má v rotující soustavě relativní (zdánlivou) rychlost $\mathbf{v}^*$, která má jiný směr, než je směr osy otáčení, Gaspard-Gustav de Coriolis (1792-1843) odvodil, že pro tuto zdánlivou (setrvačnou) sílu platí:

$$\mathbf{F}_c^* = 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^*,$$

kde $\boldsymbol{\omega}$ značí úhlovou rychlost otáčivého pohybu soustavy, který má směr osy otáčení.

Tato síla je na Zemi mimo jiné zodpovědná za pasáty, tedy stáčení větrů od pólů k západu.

4 ZÁVĚR

Mým cílem bylo lidským („studentským“) způsobem objasnit matematické „nástroje“ základů vektorového počtu a jejich následnou aplikaci do výběru fyzikálních zákonů zejména z oblasti newtonovské mechaniky.

K objasnění problematiky jsem přistupovala z pohledu posluchačky 3. ročníku oboru Pedagogického asistentství matematiky a fyziky pro ZŠ, kromě definic a vět jsem se snažila především o vysvětlení tematiky prostřednictvím vlastních komentářů, přirovnání, poznatků a názorných obrázků. Snažila jsem se práci vystavět na logické návaznosti podkapitol a jejich plynulém propojování.

Při psaní práce jsem kromě uvedených zdrojů používala vlastní logické úsudky a matematické a fyzikální představy. Jejich prostřednictvím jsem chtěla přispět k rozšíření fyzikálních představ laické zainteresované veřejnosti, zejména pak posluchačům fyziky a matematiky středních odborných škol a gymnázií. Mým plným zadostiučiněním by bylo, kdyby si alespoň jeden čtenář řekl: „Konečně tomu rozumím.“

Ačkoliv jsem původně zamýšlela fyzikální představy rozšířit i do infinitezimálního počtu, oblast vektorové analýzy je velmi rozsáhlá a zabrala větší polovinu práce na úkor jejích fyzikálních aplikací. Výhledově předpokládám, že bych zpracovala podobné téma diplomové práce, avšak s diferenciálním a integrálním počtem, což by otevřelo dveře k rozšíření fyzikálních aplikací a bohatším „vydovádění se“ na matematice ve fyzice.

5 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] HORÁK, Pavel. *Lineární algebra a geometrie 1*. 2012. Učební text. 108 s. [online] dostupné z:

<https://www.math.muni.cz/~janyska/LA_CELE.pdf>

[2] ŽÁDNÍK, Vojtěch. *Geometrie 2*. 2013. Učební text. 124 s.

[3] HORÁK, Pavel. *Algebra a teoretická aritmetika. I [Horák, 1987]*. 1. vyd. Brno: Rektorát UJEP, 1985. 196 s.

[4] DOŠLÁ, Zuzana a Jaromír KUBEN. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. 2. dotisk 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2008. 215 s. ISBN 978-80-210-3121-0.

[5] KOČANDRLE Milan, BOČEK Leo: *Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996.

[6] KRUPKA, František a Zdeněk HORÁK. *Fyzika: Příručka pro vysoké školy technického směru*. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1976.

[7] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. *Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky*. 1. české vyd., 2. dotisk. Překlad Jan Obdržálek, Bohumila Lencová, Petr Dub. V Brně: Prometheus, 2006, vii, 1034-1198, [30]. ISBN 80-214-1868-0.

[8] NEWTON, Isaac. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. 1687. 1. vyd. vyd. Londýn, 1871.

[9] SERVÍT, František. *Eukleidovy Základy: Elementa*. vyd. Praha: Jednota českých matematiků, 1907.

6 SEZNAM INTERNETOVÝCH ZDROJŮ

- [10] Vektorový prostor. *Gar.wz.cz* [online]. [cit. 2015-03-24]. Dostupné z: [<http://gar.wz.cz/lia/vektprost.html>](http://gar.wz.cz/lia/vektprost.html)
- [11] Vektory - základní definice. *Artemis.osu.cz* [online]. [cit. 2015-03-24]. Dostupné z: [<http://artemis.osu.cz/mmmat/txt/la/vzp.htm>](http://artemis.osu.cz/mmmat/txt/la/vzp.htm)
- [12] Lineární algebra. *Wikipedia.cz* [online]. [cit. 2015-03-24]. Dostupné z: [<http://cs.wikipedia.org/wiki/Line%C3%A1rn%C3%AD_algebra>](http://cs.wikipedia.org/wiki/Line%C3%A1rn%C3%AD_algebra)
- [13] REICHL, Jaroslav. Kdo byl první... *Encyklopedie fyziky* [online]. [cit. 2015-03-24]. Dostupné z: [<http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1449-kdo-byl-prvni>](http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1449-kdo-byl-prvni)
- [14] Historie fyziky. Informační systém Masarykovy univerzity [online]. [cit. 2015-03-24]. Dostupné z: [<https://is.muni.cz/el/1441/jaro2013/FY2BP_HIF/DejFyzK.txt>](https://is.muni.cz/el/1441/jaro2013/FY2BP_HIF/DejFyzK.txt)
- [15] Skalární součin. POLCEROVÁ. *Www.fch.vutbr.cz* [online]. [cit. 2015-03-24]. Dostupné z: [<http://www.fch.vutbr.cz/~polcerova/mat1/texty/skal.pdf>](http://www.fch.vutbr.cz/~polcerova/mat1/texty/skal.pdf)
- [16] Skalární součin. HAŠEK. *Www.home.pf.jcu.cz* [online]. [cit. 2015-03-24]. Dostupné z: [<http://home.pf.jcu.cz/~hasek/LAG/Pr6/Pr_6_SkalarniSoucin.pdf>](http://home.pf.jcu.cz/~hasek/LAG/Pr6/Pr_6_SkalarniSoucin.pdf)
- [17] Obtékání těles reálnou tekutinou. REICHL, Jaroslav. *Encyklopedie fyziky* [online]. [cit. 2015-03-24]. Dostupné z: [<http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/127-obtekani-teles-realnou-tekutinou>](http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/127-obtekani-teles-realnou-tekutinou)

[18] . Formulace Newtonova gravitačního zákona. REICHL, Jaroslav. *Encyklopedie fyziky* [online]. [cit. 2015-03-24]. Dostupné z:

<<http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/55-formulace-newtonova-gravitacniho-zakona>>

7 CITACE OBRÁZKŮ

Obr. 25:

[19] Pravidlo pravé ruky In HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. *Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky*. 1. české vyd., 2. dotisk. Překlad Jan Obdržálek, Bohumila Lencová, Petr Dub. V Brně: Prometheus, 2006, vii, 1034-1198, [30]. ISBN 80-214-1868-0. s. 50.