

Univerzita Hradec Králové  
Přírodovědecká fakulta  
Katedra fyziky

# Variační počet pro každého

Bakalářská práce

Autor: Kateřina Rennerová  
Studijní program: N1701 Fyzika  
Studijní obor: Fyzikální se zaměřením na vzdělávání  
Matematika se zaměřením na vzdělávání  
Vedoucí práce: Mgr. Filip Studnička, Ph.D.

**Univerzita Hradec Králové**  
**Přírodovědecká fakulta**

## Zadání bakalářské práce

<b>Autor:</b>	<b>Kateřina Rennerová</b>
Studijní program:	N1701 Fyzika
Studijní obor:	Fyzikální se zaměřením na vzdělávání Matematika se zaměřením na vzdělávání
Název práce:	Variační počet pro každého
Název práce v AJ:	Calculus of variations in a nutshell
Cíl a metody práce:	Práce bude koncipována jako stručný úvod do problematiky variačního počtu. Bude popsáno historické pozadí, které vedlo k rozvoji variačního počtu, včetně podrobného řešení základních variačních úloh s důrazem na další využití této práce ve výuce. Práce bude rovněž obsahovat shrnutí matematického aparátu nutného pro pochopení pojmů funkcionál a variace.
Garantující pracoviště:	katedra fyziky Přírodovědecké fakulty UHK
Vedoucí práce:	Mgr. Filip Studnička, Ph.D.
Oponent:	doc. RNDr. Jan Kříž Ph.D.
Datum zadání práce:	07.05.2015
Datum odevzdání práce:	

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala (pod vedením vedoucího práce) samostatně a s použitím uvedené literatury.

V Hradci Králové dne

Podpis .....

## **Poděkování**

Ráda bych poděkovala panu Mgr. Filipu Studníčkovi, Ph.D. za odborné vedení, vstřícnost při konzultacích a cenné rady, které mi pomohly při zpracování této práce.

## **Anotace**

RENNEROVÁ, Kateřina. *Variační počet pro každého*. Hradec Králové, 2015. Bakalářská práce. Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta, Katedra fyziky. 49 s.

Tato bakalářská práce je věnována základním úlohám variačního počtu. Práce je rozdělena na čtyři kapitoly. První kapitola obsahuje stručný historický vývoj a přehled matematiků, kteří se těmito úlohami zabývali. Druhá kapitola je zaměřena na formulaci čtyř základních úloh. Třetí kapitola provede čtenáře intuitivními myšlenkami, které jsou potřeba k vyřešení úloh. V poslední kapitole je popsáno řešení základních úloh.

## **Klíčová slova**

brachistochrona, řetězovka, izoperimetrická úloha, rotační těleso

## **Annotation**

RENNEROVÁ, Kateřina. *Calculus of variations in a nutshell*. Hradec Králové, 2015. Bachelor Thesis. University of Hradec Králové, Faculty of Science, Department of Physics. 49 pp.

This bachelor thesis is devoted to the basic problems of calculus of variations. The thesis is divided into four chapters. The first chapter of the thesis contains brief historical development and overview of mathematicians, who dealt with them. The second chapter analyzes intuitive ideas on the formulation of the four basic problems. The third chapter makes the reader the main ideas that are needed to solve problems. In the last chapter the solution of basic problems is described.

## **Keywords**

brachistochrone, catenary, isoperimetric problem, rotational body

# Obsah

Úvod	9
<b>1 Historická část a motivace</b>	<b>10</b>
<b>2 Formulace klasických úloh</b>	<b>14</b>
2.1 Připomenutí aplikace integrálu . . . . .	15
2.1.1 Délka obecné funkce . . . . .	15
2.1.2 Povrch tělesa . . . . .	16
2.1.3 Objem tělesa . . . . .	17
2.2 Úloha o brachistochroně . . . . .	18
2.3 Řetězovka . . . . .	20
2.4 Izoperimetrický problém . . . . .	21
2.5 Rotační těleso . . . . .	23
<b>3 Teoretická příprava pro řešení úloh</b>	<b>24</b>
3.1 Porovnání funkce a funkcionál . . . . .	24
3.2 Extrém funkce . . . . .	25
3.2.1 První derivace . . . . .	25
3.2.2 Druhá derivace . . . . .	26
3.3 Extrém funkcionálu . . . . .	26
3.4 Nutná podmínka extrému . . . . .	28
3.4.1 Zobecnění derivace . . . . .	28
3.4.2 Variace funkcionálu . . . . .	29
3.4.3 Odvození Euler-Lagrangeovy rovnice . . . . .	29

<b>4</b>	<b>Řešení klasických úloh</b>	<b>33</b>
4.1	Řešení úlohy o brachistochroně . . . . .	35
4.2	Řešení úlohy o řetězovce . . . . .	39
4.3	Řešení izoperimetrického problému . . . . .	42
4.4	Řešení úlohy o rotačním tělesu . . . . .	44
	<b>Závěr</b>	<b>47</b>
	<b>Použité zdroje</b>	<b>48</b>



# Úvod

Tato bakalářská práce je věnována variačnímu počtu, který je nepostradatelným nástrojem pro řešení různých geometrických nebo fyzikálních úloh. Právě jeho široké uplatnění v ekonomii, architektuře a zejména ve fyzice vyvolává velký zájem o studium podstaty tohoto abstraktního matematického odvětví.

Práce obsahuje v první kapitole stručné historické pozadí vývoje variačního počtu a historii základních úloh. Historická část je také věnována přehledu významných matematiků, kteří tuto problematiku studovali.

Druhá kapitola čtenáře seznámí s přesnou formulací jednotlivých úloh, opatřené o jejich praktické využití. Jednotlivé úlohy jsou doplněny o názorné obrázky, které byly vytvořeny výhradně pro tuto práci.

Třetí kapitola obsahuje intuitivně popsanou nezbytnou teorii pro řešení úloh. Tato část je strukturovaná spíše jako zobecnění vědomostí, které čtenář získal na střední škole.

V poslední kapitole se nachází detailní popis řešení jednotlivých úloh. Tato řešení jsou sice všeobecně známá, ale zpracování v této práci je provedeno formou podrobného zdůvodnění každého kroku tak, aby jej dokázal reprodukovat opravdu každý.

Cílem této práce je představit tuto problematiku i čtenáři, který disponuje pouze vědomostmi získanými na střední škole a nesnaží se tak být rigorózní učebnicí matematiky. Práce se snaží motivovat v tom ohledu, že i středoškolskou matematiku lze dále jednoduše intuitivně rozvíjet pomocí získání představy o základních pojmech. Ke správnému řešení úloh je totiž možné dospět i bez matematicky korektních postupů.

Tato práce může sloužit jako aplikace ve výuce na střední škole, například v matematickém semináři. Pokud se čtenář již seznámil s pojmy jako je derivace, integrál a průběh funkce, mohla by tato práce v mnohém prohloubit získané vědomosti.

# 1 Historická část a motivace

Zachytit historický vývoj všech úloh a důležitých podnětů, které přispěly k rozvoji tohoto odvětví matematické analýzy, by vzhledem k rozsahu této práce nebylo zjevně možné. Proto jsou v následující kapitole popsány hlavní momenty, které vedly k vybudování této matematické disciplíny, jako samostatného odvětví. Dále je stručně popsán vývoj, který významně dovedl variační počet až do dnešní podoby. Více informací a souvislostí je k nalezení v literatuře [11], [12], [13].

Vývoj již známých úloh a snaha o obecnější řešení vede k velké abstrakci a tím budování variačního počtu. Prvotní vývoj započal v 17. století rozvojem infinitezimálního počtu a další vývoj ve 20. století vedl k širokému uplatnění a zobecnění známých vědomostí o integrálu a diferenciálních rovnicích. A vývoj pokračuje dodnes, nachází se stále širší uplatnění (v podstatě všude tam, kde se projevuje snaha o maximální efektivitu při řešení organizačních problémů).

U zrodu vývoje byla snaha a následné zobecnění tří úloh. Znění a následné řešení těchto úloh v jisté modifikaci obsahuje i tato práce.

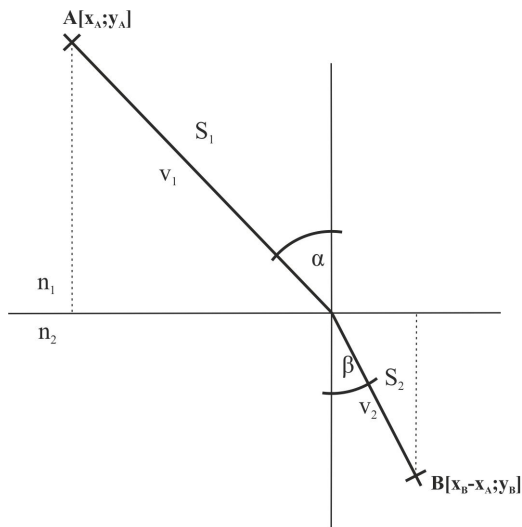
Izoperimetrická úloha, která byla prakticky vyřešena již ve starověkém Řecku, kde o ní praví báje o královně Didó. Královna se chtěla usídlit na africkém pobřeží, což vyvolalo nespokojenost místních obyvatel. A proto jejich vůdce Hiarbos dovolil královně obsadit pouze to území, které lze ohraničit jednou býčí kůží. Takovou úlohu královna vyřešila chytře. Kůži rozřezala na velmi tenké pruhy, které svázala dohromady a tím ohraničila značné území, kde vybuodovala město Kartágo (podrobněji zpracováno v [3]). Obecné řešení několika modifikací takových úloh následně vypracoval Leonhard Euler.

Úloha o brachistochroně (více o této úloze bude v této práci uvedeno později), kterou se zabývali zejména v 17. století bratři Bernoulliové. K řešení pak dospěl i Isaac Newton či de l'Hospital.

Třetí úloha se týká geodetických čar, kdy se ze všech možných čar spojujících dva body na ploše hledá taková, která má nejkratší délku. Takovou úlohu studoval Johann Bernoulli, Leonhard Euler či Joseph-Louis Lagrange.

Nyní bude historický vývoj pokračovat přehledem významných osobností, které se na vybudování variačního počtu výrazně podílely. U každé osobnosti je popsána

stručná charakteristika jejich závěrů a postřehů k tomuto tématu.



Obrázek 1: Lom paprsku

Pierre Fermat (1601-1665) výrazně posunul řešení výše zmíněných úloh díky svému variačnímu principu. Podle tohoto principu si světelný paprsek ze všech možných trajektorií mezi body A a B vybírá takovou, po které se dostane z výchozího do cílového bodu za nejkratší čas. Právě uplatněním tohoto principu na mechanické pohyby bodů vyřešil úlohu o brachistochroně. Z tohoto principu plynou i zákony geometrické optiky, které tu mohou posloužit jako motivační úlohy.

*Úloha.* Mějme situaci, kdy světelný paprsek prochází mezi dvěma prostředími s různým indexem lomu a tedy s různou rychlostí šíření tohoto paprsku. Z principu popsaného výše plyne, že paprsek se bude v každém z prostředí šířit přímočaře. Máme pevně dané body A a B. Vzdálenost bodu A od kolmice dopadu označíme  $x_A$  a vzdálenost bodu B od kolmice označíme  $x_B - x_A$ . Velikost  $x_B$  pak značí vodorovnou vzdálenost bodů A a B. To co děláme je, že měníme vzdálenost  $x_A$  kolmice dopadu od bodu A. Situace je znázorněna na obrázku 1, z kterého lze pomocí pravoúhlých trojúhelníků získat vztahy:

$$\sin \alpha = \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} \quad \sin \beta = \frac{x_B - x_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + y_A^2}}. \quad (1.1)$$

Dále je z obrázku 1 patrné, že celková dráha, kterou paprsek urazí, je dána součtem drah v každém z prostředí. Jednotlivé dráhy  $S_1$  a  $S_2$  se určí pomocí Pythagorovy věty.

$$S_1 = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \quad S_2 = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + y_A^2} \quad (1.2)$$

Pokud ze známého vztahu vyjádříme čas jako podíl dráhy a rychlostí  $v_1$  resp.  $v_2$ , lze získat vztah pro celkový čas, potřebný k uražení vzdálenosti z bodu A do bodu B. Celkový čas  $t$  je dán součtem časů potřebných pro uražení vzdáleností  $S_1$  a  $S_2$

$$t = \frac{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + y_B^2}}{v_1}. \quad (1.3)$$

Podle Fermatova principu urazí paprsek celou dráhu  $S$  za nejkratší možný čas. Proto je třeba vztah (1.3) zderivovat podle proměnné  $x_A$  a položit rovno nule, čímž se získá vztah

$$\frac{x_A}{v_1 \sqrt{x_A^2 + y_A^2}} = \frac{x_B - x_A}{v_2 \sqrt{(x_B - x_A)^2 + y_A^2}}. \quad (1.4)$$

Nyní lze využít vztahů (1.1) jako substituce pro rovnici (1.4) a tím získat

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2} \quad (1.5)$$

který je možné upravit do tvaru

$$v_2 \sin \alpha = v_1 \sin \beta. \quad (1.6)$$

Výsledkem (1.6) je zákon odrazu a lomu paprsku, ke kterému dochází na rozhraní dvou prostředí s různým indexem lomu.  $\square$

Jacob Bernoulli (1654-1705) roku 1690 odvodil rovnici izochrony a v publikaci o studiu této úlohy poprvé použil v matematické literatuře slovo integrál. V reakci na postupy svého bratra roku 1700 vypracoval svoje vlastní řešení izoperimetrického problému, které bylo prohloubením a zobecněním již známých poznatků. Řešení pro něj bylo tak motivační, že ho později vedlo ke studiu úloh směřující ke geodetickým čarám.

Johann Bernoulli (1667-1748) uveřejnil roku 1696 dopis, kde upozorňuje matematiky na problém o brachistochroně, který posléze i sám řešil. Nakonec obdržel i výslednou rovnici cykloidy. K tomuto řešení dospěl zejména díky nezdařeným pokusům svého bratra a také správnou aplikací Fermatova principu. Roku 1697 studoval geodetické úlohy a mnohé z nich i vyřešil.

Guillaume de l'Hôpital (1661-1704) se zabýval zejména matematickou analýzou a geometrií. Roku 1696 publikoval první tištěnou učebnici diferenciálního počtu, *Analýza nekonečně malých veličin*, zejména věnovanou rovinným křivkám a geodetickým čarám. Tato učebnice v mnohém navazuje na práci a výsledky Johanna Bernoulliho.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) je pokládán za zakladatele moderní matematické analýzy, a to především díky své průkopnické práci o diferenciálním a integrálním počtu, kde vycházel z abstraktních koncepcí a budoval tak čistou matematickou analýzu. Mnohá jeho symbolika se používá dodnes.

Isaac Newton (1642-1727) nezávisle na práci Leibnize vybudoval stejnou teorii, pouze s tím rozdílem, že chápal matematiku jako nástroj fyzikálního poznání světa, nikoli jako abstraktní striktně oddělenou disciplínu. Roku 1687 ve své práci *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* shrnul první poznatky a výsledky variačního počtu.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1810) reagoval na Newtonovu práci, kterou zdokonalil a doplnil o své výsledky. Spolu s W. R. Hamiltonem a C. G. J. Jacobim se věnovali aplikaci variačního počtu ve fyzice, čímž dále rozvinuli klasickou mechaniku.

Leonhard Euler (1707-1783) zobecnil poznatky I. Newtona a J. L. Lagrange. Spolu s Lagrangem pak publikovali *Metody nalezení křivek majících vlastnost maxima a minima*, kde mimo jiné sepsali i obecné řešení geodetických úloh a rozpracovali různé modifikace izoperimetrických úloh. V této publikaci byly poprvé definovány pojmy dodnes používané ve variačním počtu, kupříkladu variace funkcionálu.

Úspěšně vyřešil i brachistochronu, což publikoval v díle *Elementa Variationum*, kde aproximoval obecné křivky lomenými čarami. Tím zavedl princip, který říká, že pokud nějaká křivka má určitou vlastnost, pak tu samou vlastnost má i každý její libovolně malý element, který se dá již považovat za část přímky. Tímto principem ukázal, jak by se některé úlohy daly převést na problematiku obyčejného diferenciálního počtu. V této své práci také odvodil i diferenciální rovnice též známé jako *Eulerovy rovnice* a uvedl jejich nutnost při řešení extrémálních úloh.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) pochyboval o doposud zjištěných výsledcích a na základě výrazně systematického přístupu, který se stával z řady základních logických postupů, sepsal postačující podmínky slabého minima. Také upozornil na to, jak se silně omezuje množství úloh, pokud se křivka popisuje rovnicí  $y = y(x)$ , zatímco parametrické vyjádření  $y = y(t)$ ,  $x = x(t)$  možnosti modifikací úloh značně rozšiřuje.

Jean Gaston Darboux (1842-1917) se zabýval studiem geodetických čar a svými metodami dospěl k postačujícím podmínkám, aby geodetická čára byla opravdu nejkratší spojnicí dvou bodů na ploše. Jeho metody se značně lišily od Weierstrassových metod, protože používal své speciální souřadnice, kterými si problémy velmi zjednodušoval. Během svého studia této problematiky však své metody zobecnil až do srovnatelnosti s Weierstrassovými. A právě tyto metody posunuly variační počet daleko od primární a klasické podoby, jak uvedl J. L. Lagrange.

Stefan Banach (1892-1945) byl významným matematikem, jehož detailně sepsaný život, práce i další zajímavosti jsou detailně zpracovány v literatuře [11]. Jeho disertační práce bývá označována za zrození funkcionální analýzy, kam variační počet jistě patří. Spolupracoval s předními polskými matematiky té doby např. Janem Łukasiewiczem (1878-1956) a Waclawem Sierpińskim (1882-1969). Na jeho výsledky reagovalo mnoho matematiků, mezi nimi i David Hilbert.

David Hilbert (1862-1943) výrazně posunul vývoj variačního počtu svými poznatky z let 1900 - 1904, kdy studoval Dirichletův princip (též známý jako zásuvkový princip). Právě tento princip a zejména pak jeho uplatnění vyvolalo opětovný zájem o další studium variačního počtu. Důležité jsou především jeho dvě práce. V první ukázal použití Dirichletova principu k důkazům existence křivky minimální délky spojující dva body na ploše, v druhé práci dokázal existenci harmonické funkce. Své výsledky a postřehy přesně zformuloval ve dvaceti třech problémech, z nichž tři se týkaly variačního počtu. Řešení těchto problému vede k takzvaným přímým a nepřímým metodám řešení (více podrobností lze nalézt v [6]).

Po seznámení s charakterem historického vývoje variačního počtu lze čtenářům doporučit i stručnou historii teorie řešení diferenciálních rovnic či vývoj chápání pojmu integrál, bez jejichž zdokonalení a posunu k abstrakci by variační počet neměl dnešní podobu. Tento vývoj je k nahlédnutí například v [11].

## 2 Formulace klasických úloh

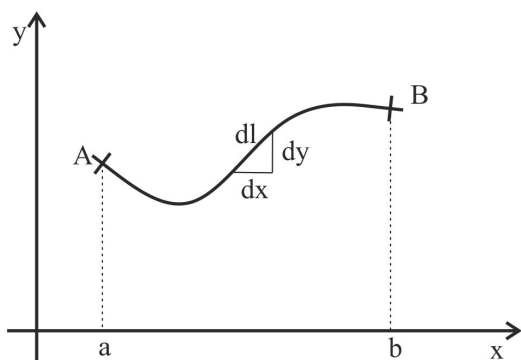
V následující kapitole jsou uvedeny a formulovány úlohy, které byly prvotním impulzem pro budování variačního počtu. Přestože k samotné formulaci těchto úloh stačí pouze základní vědomosti z oblasti matematiky a fyziky, k následnému řešení

již je zapotřebí některých vědomostí a dovedností z oblasti matematické analýzy. Řešení těchto problémů přesto poslouží k vytvoření minimálně intuitivní představy a k základnímu pochopení myšlenek variačního počtu.

## 2.1 Připomenutí aplikace integrálu

Integrál spolu s derivací se pokládají za základní operace matematické analýzy. Proto není divu, že jejich znalost je nepostradatelná i v této práci, jak při formulaci základních úloh, tak i pro jejich následné vyřešení, přičemž formulací problémů dojde k přesné definici a vymezení problematiky, což následně vybuduje i předpoklady pro následné řešení.

### 2.1.1 Délka obecné funkce



Obrázek 2: Délka křivky

Nechť je dána situace zobrazená na obrázku 2, kdy je zadána grafem obecná funkce  $y = f(x)$  procházející body  $A$  a  $B$ . Pro určení délky této křivky mezi body  $A$  a  $B$  je třeba nejprve pomyslnou plochu pod ní rozdělit na dostatečně malé části o délce  $dx$ . Tím se i křivka rozpadne na odpovídající části, které pokud budou velmi malé, tak se mohou pokládat

za úsečky. Nejprve se určí délka jednoho takového úseku, který lze popsat pomocí Pythagorovy věty

$$dl^2 = dx^2 + dy^2, \quad (2.1)$$

který po drobné úpravě má podobu:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (2.2)$$

z čehož lze vytknout  $dx^2$  a tím získat délku jednoho daného úseku křivky:

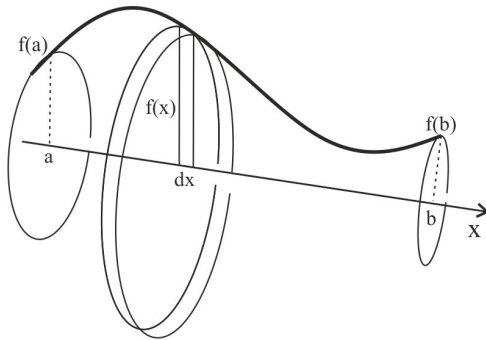
$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad (2.3)$$

kde podíl  $dy$  ku  $dx$  je jeden z předpisů pro derivaci, která se častěji označuje  $y'$ .

Následným integrováním obou stran vztahu (2.3) dojde k sečtení všech takových elementárních úseků a tím k získání vztahu pro délku obecné funkce na celém intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (2.4)$$

### 2.1.2 Povrch tělesa



Obrázek 3: Rotační křivka

Transformujeme-li situaci z roviny do prostoru, není důvod předpokládat, že by se délka křivky změnila. Ale rotací takové libovolné funkce okolo osy  $x$ , vznikne obecné rotační těleso, jehož povrch i objem lze získat analogií již popsaného postupu.

Situace je ilustrovaná na obrázku 3, kde je v prostoru dána grafem obecná rovinná funkce  $y = f(x)$  na intervalu  $a$  a  $b$ . Analogicky, jak tomu bylo při zjišťování délky křivky v rovině, tak i v tomto případě lze rotační těleso rozdělit na velmi malé části, které rozdělí celé těleso na stejně tenké válce o výšce  $dx$  a o poloměru podstavy  $f(x)$ . Přičemž plášť takového elementárního válce  $dS$  lze určit jako

$$dS = 2\pi r d = 2\pi f(x) dl \quad (2.5)$$

kde  $dl$  je část délky křivky, kterou lze popsat vztahem (2.4).

$$dS = 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (2.6)$$



což je výraz popisující povrch pláště pouze velmi malé části zkoumaného tělesa. Ještě je třeba sečíst všechny takové části na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . K tomu opět poslouží určitý integrál. Získaný vztah pro plášť obecného rotačního tělesa je

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (2.7)$$

V případě nutnosti získání celého povrchu rotačního tělesa stačí k získanému povrchu pláště přičíst plochy obou podstav, ale k následujícím formulacím úloh vystačí pouze vztah (2.7).

### 2.1.3 Objem tělesa

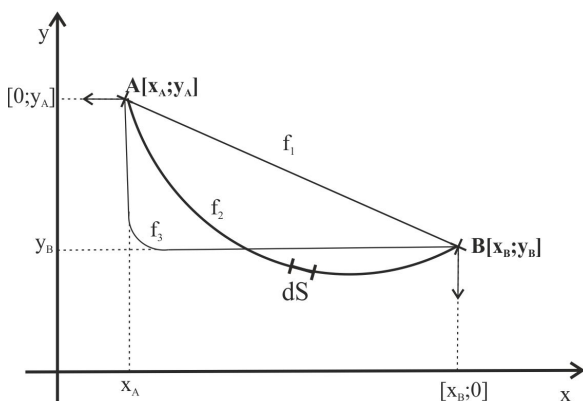
Také objem takto vzniklého tělesa lze určit z obrázku 3, kdy se zopakuje postup, jako při hledání vztahu pro povrch pláště rotačního tělesa. Pouze namísto určení pláště velmi malého válce se upřeme pozornost na objem, pro který platí:

$$dV = \pi r^2 v = \pi f(x)^2 dx \quad (2.8)$$

které se pak opět sečtou pro všechny takové válce na intervalu  $(a, b)$ . Z čehož plyne výsledný vztah pro objem:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx. \quad (2.9)$$

## 2.2 Úloha o brachistochroně



Obrázek 4: Možné řešení brachistochrony

Název této úlohy je řeckého původu (brachyistos - nejkratší a chronos - čas). Cílem je minimalizovat čas, který bude myšlená kulička potřebovat k přemístění z bodu  $A$  do bodu  $B$  pouze působením tíhového zrychlení  $g$ . Patrně každého zprvu napadne úsečka (nejkratší dráha) určená těmito body. Taková spojnice (znázorněná  $f_1$  na obrázku 4) však má malý spád a rychlost se v tomto případě zvětšuje pomalu, zatímco křivka,

kteřá by byla nejprve strmější (zobrazená  $f_3$  na obrázku 4), představuje pro hmotný bod sice delší dráhu, ale také větší rychlost na strmější části (čas by byl kratší).

**Problém 1.** *V prostoru jsou dány dva body  $A$  a  $B$ . Hmotný bod se pohybuje z bodu  $A$  do bodu  $B$  pouze působením tíhového zrychlení  $g$  (tření a odpor zde zanedbáme). Po jaké funkci se hmotný bod bude pohybovat, aby byl čas nejkratší?*

*Formulace úlohy.* Obecně lze zvolit body  $A[x_A, y_A]$  a  $B[x_B, y_B]$ , kterými prochází hledaná funkce  $y = y(x)$ . Jak je naznačeno na obrázku 4, pouhou změnou souřadnicové soustavy můžeme (bez ovlivnění obecnosti řešení) zvolit souřadnice bodů  $A[0, y_A]$  a  $B[x_B, 0]$ .

Rychlost hmotného bodu je přírůstek dráhy za čas

$$v = \frac{dS}{dt}. \quad (2.10)$$

Úloha však má za cíl minimalizovat čas, proto si jej ze vztahu (2.10) nejprve vyjádříme

$$dt = \frac{dS}{v}. \quad (2.11)$$

Ve výrazu (2.11) je dráha hmotného bodu  $dS$  samotná délka funkce na krátkém intervalu, což je popsáno již odvozeným vztahem (2.4). K určení času tedy postačí

zjistit rychlost hmotného bodu. Tu lze určit ze zákona zachování energie, který platí v každém bodě hledané funkce

$$E_k + E_p = konst \quad (2.12)$$

tedy pro libovolně zvolený bod  $[x, y]$  elementu funkce  $dS$  má vyzraz (2.12) tvar:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(y_A - y). \quad (2.13)$$

Z (2.13) lze vyjádřit rychlost, jako

$$v = \sqrt{2g(y_A - y)}. \quad (2.14)$$

Získané výrazy pro rychlost (2.14) a dráhu (2.4) lze dosadit do vztahu (2.11), čímž obdržíme vztah pro čas, který hmotný bod potřebuje k překonání dráhy  $dS$ , pohybuje-li se rychlostí  $v$ .

$$dt = \frac{dS}{v} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y_A - y)}} dx \quad (2.15)$$

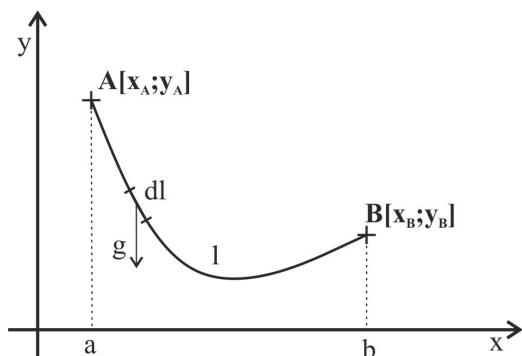
Elementy ve vztahu (2.15) je třeba sečíst na celém intervalu  $< 0, x_B >$ , což se provede integrací obou stran rovnice na daném intervalu. Takto získáme vztah, který se pro následné řešení vhodně pojmenuje  $\mathcal{T}(y, y')$ :

$$\mathcal{T}(y, y') = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(y_A - y)}} dx. \quad (2.16)$$

□

Vztah (2.16) popisuje, jak se bude měnit čas v závislosti na funkci  $y = y(x)$ , přičemž vztah (2.16) je přímo závislý na obecné křivce  $y$  a její derivaci  $y'$ . Úlohou je najít takovou funkci  $y = y(x)$ , aby byl čas minimální. Na řešení této úlohy zaměříme pozornost později.

## 2.3 Řetězovka



Obrázek 5: Řetězovka

Křivku nazývanou řetězovka lze vidět kupříkladu na vedení elektrického proudu, kdy je mezi dvěma sloupy (pevnými body, které nemusí být ve stejné výšce) zavěšen v homogenním tíhovém poli drát s konstantní hustotou. Jakou křivku takto zavěšený drát za těchto podmínek opíše, je právě studiem této klasické úlohy (viz obrázek 5).

**Problém 2.** *V prostoru jsou dány dva body  $A$  a  $B$ , mezi kterými je zavěšen řetěz (jehož články jsou nekonečně malé a má dokonalou ohebnost). Popište tvar funkce, kterou zavěšený řetěz v prostoru zaujme.*

*Formulace úlohy.* Obecně lze zvolit body  $A[x_A, y_A]$  a  $B[x_B, y_B]$ , jak tomu je na obrázku 5. Podobně jak tomu bylo u předchozí úlohy, ani v tomto případě neovlivní obecnost řešení, pokud se body pro jednoduchost přesunou do  $A[0, y_A]$  a  $B[x_B, 0]$ .

Tvar takto zavěšeného řetězu popisuje opět obecná funkce s charakteristickým vztahem  $y = y(x)$ . Protože řetěz setrvává v klidu, zaujme stav s nejmenší možnou potenciální energií, kterou určíme opět pro malý kousek řetězu pomocí jeho délky a elementu hmotnosti

$$dE_p = mgh = dmgy(x). \quad (2.17)$$

Ve vztahu (2.17) lze hmotnost kousku řetězu  $dm$ , dále popsat pomocí délkové hustoty  $\eta$  a délky  $dl$  řetězu, kterou lze popsat vztahem (2.4).

$$dm = \eta dl = \eta \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (2.18)$$

kdy (2.18) dosadíme zpět do (2.17)

$$dE_p = \eta gy(x) \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (2.19)$$

Celková potenciální energie se opět obdrží integrací vztahu (2.19) podle  $x$  na celém intervalu  $\langle 0, x_B \rangle$

$$E_p = \eta g \int_0^{x_B} y(x) \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (2.20)$$

Výraz (2.20) popisuje vztah potenciální energie v závislosti na předpisu funkce a jeho první derivaci, proto ho označíme  $\mathcal{E}(y, y')$

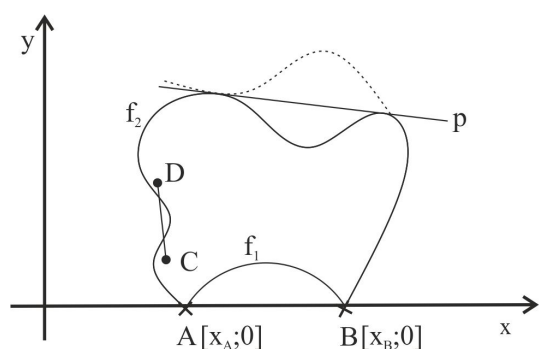
$$\mathcal{E}(y, y') = \eta g \int_0^{x_B} y(x) \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (2.21)$$

□

Výsledný vztah (2.21) popisuje závislost potenciální energie na obecné funkci  $y$  a její derivaci  $y'$  za podmínky, že známe hodnotu délky zavěšeného řetězu.

## 2.4 Izoperimetrický problém

Tato úloha je, jak již bylo zmíněno v historické části, známá i vyřešená prakticky i bez znalostí variačního počtu. Přesto však obecné řešení spolu s důkazem, že taková křivka vůbec existuje, vyřešil až švýcarský matematik Jakub Steiner roku 1838. Ten zdůvodnil intuitivní řešení, že uzavřená křivka v rovině o délce  $l$  by musela zaujímat tvar kružnice, aby ohraničila maximální plochu.



Obrázek 6: Izoperimetrická úloha

**Problém 3.** V rovině jsou dány body  $A[a, 0]$  a  $B[b, 0]$  a délka  $l$ . Nalezněte funkci tak, aby při její zadané délce  $l$  ohraničovala spolu s osou  $x$  maximální plochu  $S$ , za podmínky, aby daná funkce začínala v bodě  $A$  a končila v bodě  $B$ .

*Formulace úlohy.* Na obrázku 6 je znázorněno teoretické řešení obecnou křivkou  $f_2$ . Kdyby hledaný tvar byl konkávní, znamenalo by to, že uvnitř úvaru lze nalézt dva body  $C$  a  $D$  tak, že úsečka jimi určená není celá uvnitř ohraničené plochy, a zároveň každou takovou přímku

lze posunout tak, aby se funkce dotýkala pouze ve dvou bodech, jako přímka  $p$  na obrázku 6. Okolo takové přímky  $p$  pak lze určitou část úvaru převrátit a tím danou část proměnit v konvexní (úsečka již je celá součástí útvaru), čímž by došlo i ke zvětšení plochy, kterou chceme maximální. Analogicky lze tento postup provést na všechny konkávní úseky obecné křivky. Z tohoto usuzování plyne, že hledaná plocha je jistě *konvexní*.

V dalším je třeba zdůraznit, na jakých parametrech je tato úloha závislá. Řešení podstatně ovlivňuje velikost intervalu  $\langle a, b \rangle$  a hodnota zadané délky  $l$ . Intuitivně je zřejmé, že délka  $l$  musí být určitě delší než interval  $\langle a, b \rangle$ , aby došlo k ohraničení nějaké plochy. Avšak pokud hodnota  $l$  bude pouze o trochu větší, než zadaný interval, pak bude řešením část kružnice, která je na obrázku 6 znázorněna funkcí  $f_1$ . V takovém případě lze plochu pod funkcí popsat vztahem

$$\int_a^b y(x) dx. \quad (2.22)$$

V obecnějším případě, kdy už bude zadaná délka  $l$  mít mnohem větší hodnotu, než je velikost intervalu, nebude již řešením funkce, ale obecnější křivka.

O tom, zda výsledná křivka bude funkce nebo ne, hovoří tzv. *izoperimetrická nerovnost*. Tato nerovnost v rovině dává do souvislosti délku vzniklé kružnice a plochu, kterou ohraničí, tj.  $l = 2\pi r$  a  $S = \pi r^2$ . Pokud se ze vzorce pro obvod kružnice vyjádří poloměr jako  $r = \frac{l}{2\pi}$ , který se následně dosadí do vztahu pro obsah kruhu. Tak po drobné úpravě se obdrží tvar

$$l^2 = 4\pi S, \quad (2.23)$$

který rozděluje množinu řešení na již zmíněné dvě části. Pokud  $l^2 \leq 4\pi S$  pak je řešením funkce. Ale pokud se uvažuje obrácená nerovnost, jde již o studium křivky, která funkcí není, a tedy nelze využít funkční závislosti  $y = y(x)$ , jak tomu bylo doposud.

Studium křivek v mnohém přesahuje rámec této práce (parametrické vyjádření, odvození jiného vztahu pro délku křivky, plochy pod ní a v neposlední řadě i samotné řešení). Proto se zde zaměří pozornost na řešení vztahu (2.22) za podmínky, že výsledná křivka je funkce.

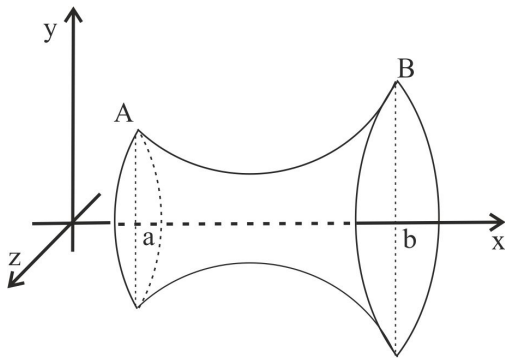
$$\mathcal{S}(y) = \int_a^b y(x) dx. \quad (2.24)$$

□

Pro tento vztah (2.24) je třeba v dalším nalézt funkci  $y = y(x)$ , aby jeho hodnota byla maximální. Za podmínky, že je zadaná délka  $l$ , kterou lze popsat vztahem (2.4).

## 2.5 Rotační těleso

Tato úloha má své uplatnění například při snaze o úsporu materiálu, kdykoli řešení problému záleží na tom, aby dané těleso mělo minimální povrch. Ať již jde o případnou konstrukci nějaké nádoby nebo jiných obalových materiálů.



Obrázek 7: Těleso vzniklé rotací okolo osy  $x$

dem  $A = [a, y_a]$  a  $B = [b, y_B]$ .

Zkusíme body  $A$  a  $B$  spojit přímkou. Na intuitivní představě lze usoudit, jaký vliv by na povrch pláště měla funkce, která by měla funkční hodnoty větší popřípadě menší než zmíněná přímka. Funkce s funkčními hodnotami většími by jistě při rotaci ohraničila větší objem, a tedy i povrch, ale jelikož v této úloze je cílem minimalizovat povrch pláště vzniklého tělesa, lze předpokládat, že funkce by mohla mít tvar znázorněný na obrázku 7.

Vztah pro povrch pláště takto vzniklého tělesa popisuje výše odvozený vztah (2.7), který platí pro libovolnou funkci. Cílem této úlohy je tedy nalézt takovou funkci, pro kterou platí, že vztah

**Problém 4.** *Nechť jsou v prostoru dány dva body  $A$  a  $B$ , které nemusí být výhradně ve stejné výšce. Jakou funkcí budou tyto dva body spojeny, chceme-li, aby po rotaci této funkce okolo vodorovné osy  $x$  vzniklo těleso o nejmenším povrchu pláště? (viz obrázek 7).*

*Formulace úlohy.* Mějme na libovolném intervalu  $\langle a, b \rangle$  zadanou obecnou funkci  $y = y(x)$ , která prochází bo-

$$\mathcal{S}(y, y') = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \quad (2.25)$$

bude mít minimální hodnotu.

□

Výsledný vztah (2.25) je stejně jako u předešlých výsledných vztahů závislý na předpisu funkce  $y$  a jeho derivaci  $y'$ .

### 3 Teoretická příprava pro řešení úloh

Tato kapitola poslouží jako přehled nezbytných pojmů, na základě kterých by mělo dojít k pochopení a rozšíření základních vědomostí, které jsou potřebné k řešení uvedených úloh. Nejprve se v této kapitole připomenou znalosti a práce s funkcí jedné proměnné, které se následně do jisté míry zobecní, aby se daly v analogii aplikovat na prostor funkcí.

#### 3.1 Porovnání funkce a funkcional

Variační počet studuje podmínky a metody umožňující nalézt maximální nebo minimální hodnotu funkcionalů, jež jsou například výsledkem úloh (2.16), (2.21), (2.24) a (2.25) zformulovaných v minulé kapitole. Další příklady a podrobnější studie lze najít v literatuře [1], [4].

Na první pohled by nemusel být jasně patrný rozdíl mezi funkcionalem a funkcí. Funkce je vyjádřena vztahem  $y = f(x)$ , tj. číslu  $y$  je dle předpisu  $f$  přiřazeno jisté číslo.

Pro funkcional je charakteristická závislost  $\mathcal{F} = F[y(x)]$ , kdy je číslo  $\mathcal{F}$  přiřazeno k nějaké funkci  $y(x)$  s určitou vlastností, tj. funkcional je definovaný přinejmenším pro  $x \in (a, b)$  a pro funkci  $y$  na tomto intervalu mající derivaci alespoň stupně  $n$  - množina takových funkcí  $y$  se značí  $C^n$ .

Funkce má za definiční obor i obor hodnot podmnožiny reálných čísel. Ale definičním oborem funkcionalu je jistá množina funkcí a oborem hodnot je podmnožina reálných čísel, kterých funkcional nabývá.



Při zobecnění pojmů funkce a postupu pro hledání jejího extrému i pro funkcionál, se do jisté míry objeví analogie při řešení extrému funkcionálu. Proto se v další části nejprve připomene postup při hledání extrému funkce a základní pojmy s ním spojené.

## 3.2 Extrém funkce

Definice extrému funkce zní: funkce  $f$  má v bodě  $a \in D(f)$  *lokální minimum*, jestliže existuje  $\delta > 0$ , že pro každé  $x$  z intervalu  $(a - \delta, a + \delta)$  je  $f(x)$  větší nebo rovno než  $f(a)$ . A funkce  $f$  má v bodě  $a \in D(f)$  *lokální maximum*, jestliže existuje  $\delta > 0$ , že pro každé  $x \in (a - \delta, a + \delta)$  je  $f(x) \leq f(a)$ .

Volněji řečeno lokální extrém funkce v bodě  $a$  z definičního oboru funkce je takový bod, který má funkční hodnotu největší nebo nejmenší v porovnání s libovolně zvoleným bodem  $x$  z okolí bodu  $a$ . Z důvodu, že libovolně zvolené okolí  $\delta$  bodu  $a$  musí být z definičního oboru funkce, lze mluvit o extrému funkce jen ve vnitřních bodech definičního oboru, tedy nikoliv v krajních bodech.

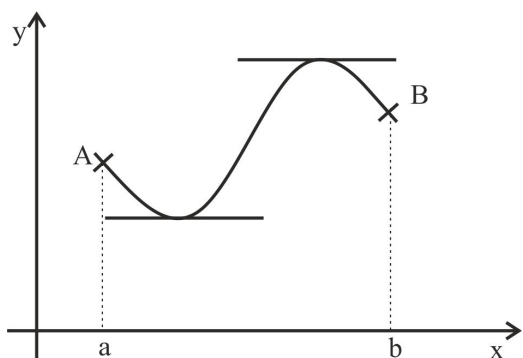
### 3.2.1 První derivace

Derivace funkce v bodě je definovaná jako poměr změny funkční hodnoty na změně nezávislé proměnné  $x$ . Derivace tedy popisuje, jak se změní funkční hodnoty funkce pokud dojde v definičním oboru funkce ke změně hodnoty  $x$  o  $dx$ , tj.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.1)$$

V případě, kdy by se hledal extrém funkce jedné proměnné  $y = f(x)$ , spočítala by se nejprve první derivace  $y' = f'(x)$  studované funkce na intervalu z definičního oboru, kde je funkce spojitá. Tato derivace by se položila rovna nule a vypočítaly kořeny (pokud existují) vzniklé rovnice, čímž by se získaly tzv. *stacionární body*.

Takové body se někdy nazývají též podezřelé z extrému, protože v těchto bodech může být extrém funkce, ale nemusí. Nicméně stacionární body rozdělí definiční obor na několik intervalů, kdy z každého lze zvolit reprezentanta  $x$ , který se dosadí do získaného vztahu pro první derivace  $y' = f'(x)$ .



Obrázek 8: Tečna v bodě extrému

bodě již se daný bod může označit za lokální extrém funkce.

Geometrická interpretace derivace je směrnice tečny v daném bodě. Tečna v bodě, kde se nachází extrém funkce, má směrnici nulovou (situace je znázorněna na obrázku 8).

### 3.2.2 Druhá derivace

Pokud neurčí jednoznačně extrém funkce první derivace, postupuje se dále při hledání extrému s druhou derivací  $y''$  a to zejména proto, že první derivace je často označována pouze za nutnou podmínku, ale postačující podmínku pak tvoří až závěry z druhé derivace. Nalezením kořenů rovnice složené z druhé derivace položené rovné nule, se získají tzv. *inflexní body*. Tyto body opět rozdělí definiční obor funkce na intervaly, kde stejným způsobem jako u první derivace lze určit, zdali je na intervalu funkce kladná (záporná). Pak je funkce konvexní (konkávní) na daném intervalu, což je vidět i na grafu funkce, kdy pokud je v daném bodě graf funkce nad svojí tečnou, pak je konvexní a naopak. Dosadí-li se do vztahu pro druhou derivaci kořeny rovnice z první derivace, tak podle znaménka získané hodnoty lze typ extrému v daném bodě také určit. Pokud je druhá derivace v bodě kladná (záporná) nachází se v bodě lokální minimum (maximum) studované funkce. [7]

## 3.3 Extrém funkcionalu

Podobně jako u funkce jedné reálné proměnné se také u funkcionalů hovoří o lokálním extrému, který je někdy ve variačním počtu označován jako *relativní extrém*, jehož definice je na první pohled podobná jako u funkce.

Funkcionál  $\mathcal{F}$  nabývá lokálního maxima na množině  $C^n$  pro každé  $y$ , jestliže  $y \in C^n$  a  $\mathcal{F}(\hat{y}) \leq \mathcal{F}(y)$  pro všechna  $\hat{y} \in U \cap C^n$ , kde  $U$  je nějaké okolí funkce  $y$  ( a pro lokální minimum funkcionálu by platila obrácená nerovnost  $\mathcal{F}(\hat{y}) \geq \mathcal{F}(y)$ ).

Lokální extrém funkcionálu je do jisté míry analogii extrému funkce. Avšak pojem okolí funkce nemusí být jasně srozumitelný v porovnání s okolím bodu.

Pokud je velikost funkce popsána jako největší hodnota z funkčních hodnot, tj.

$$|f|_0 = \max|y(x)|; x \in (a, b). \quad (3.2)$$

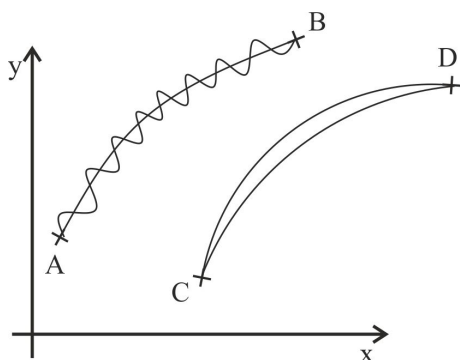
Pak okolím funkce  $y$  lze chápat jako všechny funkce mající od  $y$  malou vzdálenost, tj.

$$U_0(y) = \{y : |\hat{y}(x) - y(x)| < \delta\}. \quad (3.3)$$

Jinými slovy, řekneme, že funkce  $y$  má ve svém blízkém okolí funkci  $\hat{y}$ , přičemž vzdálenost jejich funkčních hodnot je malé číslo. Takové funkce  $\hat{y}$  z okolí se pak nazývají blízké, málo odlišné, nebo sousední s  $y$  nultého řádu.

Někdy se také klade za požadavek u sousedních křivek, vedle blízkosti argumentu  $x$ , aby měly také malý rozdíl směrnic tečen (tedy první derivace) v tomto bodě.

$$|f|_1 = \max\{|y(x)|; x \in (a, b)\} + \max\{|y'(x)|; x \in (a, b)\}. \quad (3.4)$$



Obrázek 9: Sousední křivka

V takovém případě se pak křivka  $\hat{y}$  nazývá blízká ve smyslu prvního řádu k funkci  $y$ . A okolím  $U_1$  funkce jsou pak všechny křivky  $\hat{y}$  nacházející se v blízkosti prvního řádu (obdobně tomu je pro vyšší řády).

Na obrázku 9 jsou znázorněny oba typy výše zmíněných křivek. Křivky mezi body  $A$  a  $B$  leží v sousedství nultého řádu, ale nikoli už prvního řádu, jako je tomu u křivek mezi body  $C$  a  $D$ . U první dvojice křivek se u jednotlivých bodů

(příslušných stejnému argumentu) směrnice tečen liší podstatně v porovnání s absolutními hodnotami nultého řádu, ale u křivek mezi body  $C$  a  $D$  nedochází k takovým změnám mezi vzdáleností nultého a prvního řádu, z čehož plyne, že pokud křivka leží v blízkosti libovolného vyššího řádu, leží i v blízkosti všech nižších řádů. [4]

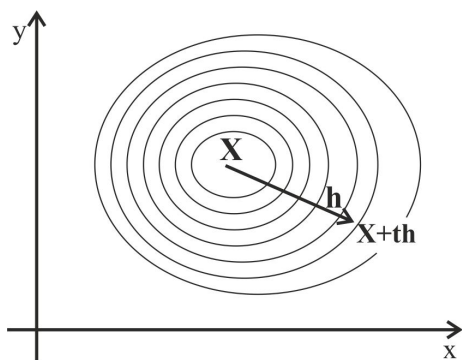
### 3.4 Nutná podmínka extrému

Před zavedení této podmínky pro funkcionál je nutné čtenáři rozšířit představy o některých pojmech, které byly použité pro hledání extrému funkce jedné proměnné.

#### 3.4.1 Zobecnění derivace

Aby došlo k pochopení podmínky extrému funkcionálu je zapotřebí zobecnit pojem derivace funkce v bodě. Protože v definici uvedené vztahem (3.1), dochází ke změně proměnné  $x$ , pouze speciálním případem ve směru osy  $x$ . Aby informace o hledané funkci byla úplnější je třeba tento pojem rozšířit, k čemuž poslouží modelová situace mapy.

Na mapě, která zobrazuje reálný prostor na papír, je každý bod  $X$  určen dvěma souřadnicemi  $(x, y)$  a nadmořskou výškou  $f(x, y)$ . Na takové mapě již není nutné se pohybovat pouze ve směru pomyslné osy  $x$ , ale možný rovnoměrný a přímočarý pohyb může být ve směru libovolného vektoru  $\mathbf{h}$ .



Obrázek 10: Vrstevnice na mapě

Otázka zní, jaká je složka vertikální rychlosti, která je rychlostí změny nadmořské výšky (rychlost klesání, stoupání). Ta závisí na povaze terénu (funkci  $f$ ) a také na horizontální rychlosti (vektoru  $\mathbf{h}$ ). Tato rychlost bude jistě dána poměrem velikosti dráhy za čas. Bude-li počáteční (v čase  $t = 0$ ) bod na mapě  $X = (x_0, y_0)$  o nadmořské výšce  $f(x_0, y_0)$ , za čas  $t$  dojde na mapě

k posunu na bod  $x_0 + t\mathbf{h}$  o nadmořské výšce  $f(x_0 + t\mathbf{h})$ . Pak hledaný poměr popisující rychlost pro velmi malé  $t$  je

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(X + t\mathbf{h}) - f(X)}{t} \quad (3.5)$$

což popisuje okamžitou rychlost v bodě  $X$ . Taková derivace funkce  $f$  v bodě  $X$  ve směru vektoru  $\mathbf{h}$  se nazývá krátce *směrová derivace*. [2].

Analogii vztahu (3.5) s funkcí jedné proměnné lze i snadno ověřit. Pokud se bude  $t = \Delta x$  a  $\mathbf{h} = (1, 0)$ , bude vztah (3.5) totožný s (3.1), půjde tedy o derivaci funkce podle proměnné  $x$ .

Zobecněním takové modelové situace ze dvou souřadnic lze provést analogicky do prostoru, kde bude mít vektor obecně složek  $n$ .

### 3.4.2 Variace funkcionalu

Podobně jak tomu bylo u hledání extrému funkce jedné proměnné, kde nutnou podmínkou pro nalezení extrému byla nulová první derivace v tomto, je u funkcionalu tato podmínka dosti podobná.

Nutná podmínka pro extrém funkcionalu volně řečeno zní, že máme-li funkcional  $\mathcal{F}$ , do kterého dosadíme nějakou funkci  $\hat{f}$  sousední funkci  $f$ , ve které má funkcional extrém, pak platí:

$$\delta\mathcal{F} = \mathcal{F}(\hat{f}) - \mathcal{F}(f) \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

Což volněji řečeno znamená v analogii funkce více proměnných, že pokud má být na kopci extrém, pak když dojde k řezu kopce rovinou v libovolném směru, získá se na rovině graf funkce jedné proměnné, která musí mít v místě kopce derivaci rovnou nule. A namísto derivace ve všech směrech se u funkcionalů používá pojem *variace*.

Podobně jako u hledání extrému funkce jedné proměnné, pokud se najde jasné řešení z první derivace, není třeba řešit druhou derivaci. Právě z těchto důvodů se postačující podmínka často ve studijních textech vynechává a v této práci tomu bude obdobně. Nicméně je spolu s dalšími příklady k nalezení v literatuře [4].

### 3.4.3 Odvození Euler-Lagrangeovy rovnice

Při formulaci základních úloh variačního počtu, byly odvozené funkcionaly závislé na funkci  $y = y(x)$ , která spojuje body  $A[a, 0]$  a  $B[b, 0]$ . Také měly tvar složený z in-

tegrálu takové funkce  $y$ . Zde si ukážeme, jak by se hledalo obecné řešení takového funkcionálu.

Mějme obecný funkcionál  $\mathcal{F}$ , u kterého se hledá lokální extrém. Dále je možno předpokládat, že tento extrém se bude realizovat na funkci  $y = y(x)$ , tedy lze psát obecný funkcionál tvaru

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx. \quad (3.7)$$

Nutnou podmínkou pro existenci lokálního extrému je, že variace tohoto funkcionálu musí být rovna nule, což označíme  $\delta\mathcal{F} = 0$ . Dále lze předpokládat, že pokud  $y$  je stacionárním řešením funkcionálu, bude se v okolí této funkce nacházet funkce k ní blízká  $\hat{y}$ , která je totožná pouze v bodech  $\hat{y}(a) = y(a)$  a  $\hat{y}(b) = y(b)$ .

Nyní můžeme blízkou funkci  $\hat{y}$  psát ve tvaru přírůstku funkce  $y$ , což jde také zapsat jako

$$\hat{y}(x, \varepsilon) = y(x) + \varepsilon\eta(x) = y(x) + \delta y(x) \quad (3.8)$$

kde  $\varepsilon$  je malé číslo a  $\delta y$  představuje variaci hledané funkce  $y(x)$ . Z čehož lze vyjádřit variaci funkce  $y(x)$  jako

$$\delta y(x) = \hat{y}(x, \varepsilon) - y(x) = \hat{y} - y = \varepsilon\eta(x). \quad (3.9)$$

A pro speciální případ, kdy  $\varepsilon = 0$  pak bude platit, že blízká křivka  $\hat{y}$  se bude rovnat stacionární funkci  $y$ . Zavedeme si:

$$\mathcal{F}(y + \varepsilon\eta) = \Phi(\varepsilon) = \int_a^b F(x, y + \varepsilon\eta, (y + \varepsilon\eta)') dx = \int_a^b F(x, \hat{y}, (\hat{y})') dx, \quad (3.10)$$

kde pro přípustnou funkci  $\eta$  platí  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ . Čímž se situace z hledání extrému funkcionálu převedla na hledání extrému funkce  $\Phi(\varepsilon)$ , pro kterou platí, že pokud se  $\varepsilon$  blíží k nule, pak  $\hat{y}$  se blíží k  $y$ , ve které má funkcionál extrém, což můžeme zapsat ve tvaru

$$\delta\mathcal{F} = \mathcal{F}(\hat{y}) - \mathcal{F}(y) \rightarrow 0, \quad (3.11)$$

což platí, pokud  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tedy

$$\left. \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (3.12)$$

provedem tedy takovou derivaci funkcionálu (3.10), pomocí složené funkce, jako

$$\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial \hat{y}} \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \hat{y}'} \frac{d\hat{y}'}{d\varepsilon} \right) dx \quad (3.13)$$

což lze dále upravit na tvar

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial \hat{y}}(\eta) + \frac{\partial F}{\partial \hat{y}'}(\eta') dx, \quad (3.14)$$

který se podle (3.12) a (3.14) rovná nule.

Dále jde (3.14) rozdělit na dva integrály, protože integrál ze součtu funkcí je to samé, jako součet integrálu z jednotlivých výrazů:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial \hat{y}}(\eta) dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \hat{y}'}(\eta') dx = 0. \quad (3.15)$$

Jelikož je nutnou podmínkou extrému, že  $\varepsilon = 0$ , můžeme v rovnici (3.15) nahradit  $\hat{y}$  resp.  $\hat{y}'$  přímo hledanou funkcí  $y$  resp.  $y'$ :

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(\eta) dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}(\eta') dx = 0. \quad (3.16)$$

Nyní by bylo dobré, aby se v každém z integrálů našel společný člen, který by se dal vytknout, tím by se následně využilo toho, že se takový výraz rovná nule.

Tento postup je známý i při upravování jednodušších výrazů, protože pokud je nějaký výraz složen ze dvou členů, které se mají rovnat nule, pak se aspoň jeden z nich musí rovnat nule, tj. položí se každý nule zvlášť. Kdybychom se pokusili tento postup aplikovat i zde, musel by se jeden z integrálů ve vztahu (3.16) upravit, zkusme tedy nejprve upravit druhý integrál.

Dále budeme tedy pracovat jen s druhým integrálem ze vztahu (3.16), označme jej  $I_2$ :

$$I_2 = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}(\eta') dx \quad (3.17)$$

Pokud vidíme integrál složený ze součinu dvou členů, je vhodné použít metodu per-partes, pro kterou je znám vztah:

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v. \quad (3.18)$$

Již z výrazu(3.18) je vidět, že pokud se vhodně zvolí substituce, tak metodu per - partes sice vznikne opět integrál, ale dojde k upravení z  $v'$  na  $v$ , což by se velmi hodilo i pro výraz (3.16). Pokud by se v integrálu  $I_2$  proměnilo  $\eta'$  na  $\eta$ , mohl by se tento člen z obou integrálů vytknout.

Zaveďme tedy substituci

$$u = \frac{\partial F}{\partial y'} \quad v' = \eta' \quad (3.19)$$

a tuto substituci (3.19) dosadíme do vztahu (3.18). Z čehož získáme

$$I_2 = \left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta dx \quad (3.20)$$

kde člen v závorce je roven nule, protože,  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ , takže původní  $I_2$  se podařilo upravit na tvar

$$I_2 = - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta dx \quad (3.21)$$

takto upravený (3.21) se dosadí zpět do (3.16)

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(\eta) dx - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta dx \quad (3.22)$$

Z (3.22) nyní vytkneme  $\eta$  z obou integrálů a využijeme obráceně již použité podmínky, že součet integrálu je integrál součtu

$$\int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx = 0. \quad (3.23)$$

Nyní již lze vztah (3.23) rozdělit na dva výrazy, které se rovnají nule, což byl záměr. Jeden z nich je  $\eta = 0$ , ale jelikož je  $\eta$  libovolná funkce, tak tato situace nikdy nemůže nastat. Druhý výraz je:



$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (3.24)$$

Tento vztah je nutnou podmínkou pro nalezení extrému funkcionálu a bývá obvykle nazýván *Euler-Lagrangeova rovnice*.

## 4 Řešení klasických úloh

V této kapitole budou s jistou mírou podrobnosti vyřešené funkcionály (2.16), (2.21), (2.24), (2.25), které jsou výsledkem formulace jednotlivých úloh. Řešení je sice v jisté formě k nalezení ve velké části literatury s tematikou variačního počtu, ale většinou jde o stručný a méně vysvětlený postup. Takový postup však má svoji úlohu jen jako kontrola průběžných výsledků, nicméně k vysvětlení jednotlivých kroků je nedostačující.

Postup řešení bude u jednotlivých úloh značně analogický. Cílem je nalézt určitý extrém vztahů (2.16), (2.21), (2.24), (2.25). Proto je v první řadě třeba sestavit Euler-Lagrangeovy rovnice, která převede tvar integrálního funkcionálu na diferenciální rovnici. U takové rovnice se pak mnohdy hledá řešení snadněji. Zároveň by se jistě dalo vhodně využít faktu, že všechny čtyři funkcionály nejsou explicitně závislé na  $x$ .

Uvažujme dále takový funkcionál  $\mathcal{F}(y, y')$ , který není explicitně závislý na  $x$  a provedme nyní derivaci funkce  $F$  v integrálu funkcionálu pomocí pravidla o derivaci složené funkce (tj. postup připomíná rozšíření zlomku).

$$\frac{d}{dx} F(y(x), y'(x)) = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} \quad (4.1)$$

nyní se může (4.1) upravit pomocí substituce  $y' = \frac{\partial y}{\partial x}$  a  $y'' = \frac{\partial y'}{\partial x}$  na tvar

$$\frac{d}{dx} F = \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y''. \quad (4.2)$$

Pouhým přeskupením členů v (4.2) lze získat následující rovnost

$$\frac{\partial F}{\partial y'} y'' = \frac{d}{dx} F + \frac{\partial F}{\partial y} y'. \quad (4.3)$$

před použitím (4.3) zaměříme pozornost ještě na jednu identitu z této problematiky.

Provedeme následující derivaci součinu, podle vztahu  $uv = u'v + uv'$

$$\frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial y'} y'' + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) y'. \quad (4.4)$$

z tohoto vztahu (4.4) nyní vyjádříme stejný člen jaký je vyjádřen v (4.3) na levé straně rovnosti

$$\frac{\partial F}{\partial y'} y'' = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) y' - \frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right). \quad (4.5)$$

Čímž se získaly dva vztahy (4.3) a (4.5), které mají totožnou levou stranu své rovnosti, takže lze dosadit jeden za druhý a tím porovnat i pravé strany výše uvedených rovností.

$$\frac{d}{dx} F + \frac{\partial F}{\partial y} y' = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) y' - \frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \quad (4.6)$$

v takto vzniklém vztahu (4.6) lze opět pouhou záměnou pořadí jednotlivých členů získat

$$\frac{d}{dx} F - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) y' = y \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \quad (4.7)$$

pokud si (4.7) důkladně prohlédneme, zjistíme, že na pravé straně rovnosti se objevil tvar Euler-Lagrangeovy rovnice totožné s (3.24). A jak již bylo několikrát zmíněno, tento vztah musí být roven nule, aby funkcionál  $\mathcal{F}$  měl na funkci  $y$  extrém.

Zajisté není pochyb, že tomu tak musí být i pro  $\mathcal{F}(y, y')$ , které explicitně nezávisí na  $x$ . Pokud se tedy pravá strana rovnosti (4.7) rovná nule, rovnost (4.7) upravíme na tvar

$$\frac{d}{dx} F - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) y' = 0 \quad (4.8)$$

a po vytknutí stejného členu v (4.8) i jednodušší tvar

$$\frac{d}{dx} \left( F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) = 0. \quad (4.9)$$

Pokud ještě rovnost (4.9) zintegrujeme na obou stranách podle proměnné  $x$ , získá se vztah

$$F - y' \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = c_1. \quad (4.10)$$

kde  $c_1$  na pravé straně je integrační konstantou. Tato rovnice je často označována jako, tzv. *Beltramiho identita*. [10]

Rovnice (4.10), představuje Euler-Lagrangeovu rovnici pro  $\mathcal{F}(y, y')$ . Sestavení takové rovnice je v porovnání s (3.24) mnohem jednodušší a numericky méně náročné.

Dále uvedené postupy řešení budou v první řadě směřovat k sestavení rovnice (4.10). Tato rovnice se bude postupně co nejvíce zjednodušovat, až se nakonec upraví do podoby, kdy půjde za  $y'$  přehledně dosadit vztah z definice derivace. Následně se rovnost zintegruje, čímž se pozornost řešení obrátí zase na počítání vzniklého integrálu.

Z výše uvedeného postupu vedoucího k řešení jednotlivých úloh je patrné, že výsledek není možné získat hned po několika úpravách. Proto nejsou v každém z řešení obsaženy naprosto všechny výpočty, ale každý krok je přinejmenším řádně okomentován tak, aby bylo patrné, co se mezi jednotlivými úpravami pozměnilo.

## 4.1 Řešení úlohy o brachistochroně

Výsledkem formulace této úlohy, byl vztah (2.16), který má tvar

$$\mathcal{T}(y, y') = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(y_A - y)}} dx. \quad (4.11)$$

*Řešení:* Nejprve je třeba sestavit rovnici (4.10). Což znamená konkrétně vypočítat derivaci funkcionálu podle  $y'$ . Pro přehlednější provedení derivace, lze (4.11) upravit na podíl dvou odmocnin

$$\mathcal{T}(y, y') = \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y_A - y)}} dx. \quad (4.12)$$

V dalším (4.12) je vhodné upravit podíl na součin, který se přehledněji derivuje

$$\mathcal{T}(y, y') = \int_0^{x_B} \frac{1}{\sqrt{2g(y_A - y)}} \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (4.13)$$

Nyní se výraz (4.13) zderivuje podle proměnné  $y'$  a po drobné úpravě se obdrží vztah

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2g(y_A - y)}} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}. \quad (4.14)$$

Získaný vztah (4.14), je chybějící člen, který je třeba k sestavení rovnice (4.10). Sestavíme tedy rovnici (4.10) pro konkrétní funkcionál (4.11).

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y_A - y)}} - y' \frac{1}{\sqrt{2g(y_A - y)}} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c_1 \quad (4.15)$$

S takto získanou rovnicí (4.15) lze dále pracovat, jako s kteroukoli jinou rovnicí s odmocninou. Zajisté ji lze zbavit jmenovatele vynásobením obou stran rovnice společným jmenovatelem. Ten má v tomto případě tvar součinu dvou odmocnin, tj.  $\sqrt{1 + y'^2} \sqrt{2g(y_A - y)}$ , z čehož lze získat

$$\sqrt{1 + y'^2} \sqrt{1 + y'^2} - y'^2 = c_1 \sqrt{1 + y'^2} \sqrt{2g(y_A - y)}. \quad (4.16)$$

V (4.16) se na levé straně rovnosti upraví odmocniny na

$$1 + y'^2 - y'^2 = c_1 \sqrt{1 + y'^2} \sqrt{2g(y_A - y)}. \quad (4.17)$$

V takovém tvaru rovnice (4.17) se na levé straně vyruší  $y'^2$ , tedy rovnice má tvar

$$1 = c_1 \sqrt{1 + y'^2} \sqrt{2g(y_A - y)}. \quad (4.18)$$

Pro odstranění odmocnin v (4.18) lze rovnici umocnit na druhou a tím získat

$$1 = 2gc_1^2(1 + y'^2)(y_A - y). \quad (4.19)$$

V (4.19) lze převést konstantní členy na jednu stranu rovnice, tj.

$$\frac{1}{c_1^2 2g} = (1 + y'^2)(y_A - y). \quad (4.20)$$

Na levé straně rovnice (4.20) tak vznikl člen, který je stále konstantní, proto jej pro jednodušší zápis lze označit jako  $2c_2$ :

$$2c_2 = (1 + y'^2)(y_A - y). \quad (4.21)$$

Z (4.21) se odstraní závorky a poté vyjádří  $y'^2$ , dále ještě zvolíme souřadnicový systém taky, aby  $y_A = c_2$ , tj.

$$y'^2 = \frac{c_2 + y}{c_2 - y} \quad (4.22)$$

po odmocnění vztahu (4.22) vznikne na levé straně plus a minus odmocnina ze zlomku. Podle znaménka se nyní řešení rozdělí na rostoucí a klesající úsek. Dále lze pokračovat na klesajícím úseku (protože hledáme minimum), z čehož vznikne:

$$y' = -\sqrt{\frac{c_2 + y}{c_2 - y}}. \quad (4.23)$$

vztah (4.23) upravíme tak, aby na jedné straně byly členy s  $y$

$$\sqrt{\frac{c_2 - y}{c_2 + y}} y' = -1. \quad (4.24)$$

Do (4.24) nyní lze za  $y'$  dosadit z definice derivace vztah  $dy$  ku  $dx$

$$\sqrt{\frac{c_2 - y}{c_2 + y}} \frac{dy}{dx} = -1 \quad (4.25)$$

vztah (4.25) upravíme, aby na jedné straně byly všechny členy s proměnnou  $y$  a na druhé s  $x$

$$\sqrt{\frac{c_2 - y}{c_2 + y}} dy = -dx. \quad (4.26)$$

Obě strany (4.26) zintegrujem podle daných proměnných na každé straně rovnice

$$\int \sqrt{\frac{c_2 - y}{c_2 + y}} dy = - \int dx. \quad (4.27)$$

Integrace pravé strany rovnice (4.27) lze již určit z tabulky, tj.  $-x - c_3$ . Ale integrál na levé straně je třeba upravit dál, proto jej označíme  $I_2$ . Dále zlomek pod odmocninou rozšíříme a zápis ještě upravíme následovně

$$I_2 = \int \sqrt{\frac{c_2 - y}{c_2 + y}} dy = \int \sqrt{\frac{c_2 - y}{c_2 + y} \frac{c_2 - y}{c_2 - y}} dy = \int \sqrt{\frac{(c_2 - y)^2}{c_2^2 + y^2}} dy. \quad (4.28)$$

V úpravě  $I_2$  z (4.28) lze dále pokračovat rozdělením odmocniny na podíl ze dvou odmocnin a případné další upravení na

$$I_2 = \int \frac{\sqrt{(c_2 - y)^2}}{\sqrt{c_2^2 + y^2}} dy = \int \frac{c_2 - y}{\sqrt{c_2^2 + y^2}} dy. \quad (4.29)$$

Výsledný vztah (4.29) lze rozdělit na dva integrály

$$I_2 = \int \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2 + y^2}} dy - \int \frac{y}{\sqrt{c_2^2 + y^2}} dy. \quad (4.30)$$

Pokud v (4.30) se z prvního integrálu vytkne ve jmenovateli  $c_2^2$  z odmocniny, což se může napsat před ní jako  $c_2$ . Jde o tabulkovou hodnotu funkce  $\arccos(\frac{y}{c_2})$  a druhý integrál se bude dále řešit metodou per partes podle vztahu (3.15) se substitucí  $v' = y$  a  $u = \frac{1}{\sqrt{c_2^2 + y^2}}$ . Takto lze získat

$$I_2 = -\arccos \frac{y}{c_2} + \sqrt{c_2^2 - y^2}. \quad (4.31)$$

Vztah (4.31) se dále dosadí zpět do vztahu (4.27), kde již integrační konstanta je, proto není třeba psát další u  $I_2$  a lze rovnou psát

$$-\arccos \frac{y}{c_2} + \sqrt{c_2^2 - y^2} = -x - c_3 \quad (4.32)$$

Nyní se zavede substituci a to nejlépe tak, aby její součástí byla inverzní funkce k  $\arccos \frac{y}{c_2}$ . Tedy vhodné se zdá být substituce  $y = c_2 \cos t$ , kterou lze (4.32) upravit na

$$-t + c_2 \sqrt{1 - \cos^2 t} = -x - c_3 \quad (4.33)$$

kde výraz pod odmocninou je pouze jinak zapsaný vztah pro  $\sin t^2$ , čímž se dále vztah (4.33) upraví

$$-t + c_2 \sin t = -x - c_3. \quad (4.34)$$

Z vztahu (4.34) lze již vyjádřit  $x$  v závislosti na substituci  $y = c_2 \cos t$

$$x = t - c_2 \sin t - c_3 \quad y = c_2 \cos t \quad (4.35)$$

kde  $c_2$  a  $c_3$  jsou integrační konstanty, které se určí z počátečních podmínek.  $\square$

Tento získaný vztah (4.35) popisuje funkci nazývanou jako *cykloidu*. Takovou funkci opíše hmotný bod umístěný se kružnici, která se kutálí po přímce.

## 4.2 Řešení úlohy o řetězovce

Výsledkem formulace této úlohy byl vztah (2.21), který má tvar

$$\mathcal{E}(y, y') = \eta g \int_0^{x_B} y \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (4.36)$$

kde konstanty  $\eta g$  neovlivňují další obecné řešení, proto s nimi není nutné dále při hledání extrému funkcionálu pracovat.

Pro (4.36) chceme najít extrém za podmínky, že je zadané  $l$ , které lze popsat (2.4)

$$l = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + y'^2} dx = konst. \quad (4.37)$$

*Řešení:* Před samotným řešením je nejprve třeba sloučit funkcionál (4.36) a podmínku (4.37) do jednoho pomocného funkcionálu  $\mathcal{P}$  a to lze pomoci reálného čísla  $\lambda$  jako

$$\mathcal{P} = \int_0^{x_B} y \sqrt{1 + y'^2} + \lambda \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (4.38)$$

kde (4.38) se dále upraví na

$$\mathcal{P} = \int_0^{x_B} (y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (4.39)$$

Nyní lze vztah (4.39) zderivovat podle proměnné  $y'$ , což je potřeba pro sestavení rovnice (4.10)

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y'} = (y + \lambda) \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}. \quad (4.40)$$

Pomocí získaného vztahu (4.40) již lze sestavit rovnice (4.10), která má tvar

$$(y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2} - y'(y + \lambda) \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c_1. \quad (4.41)$$

Sestavená rovnice (4.41) se dále upravuje úplně stejně jako kterákoli jiná rovnice. Nejprve se odstraní jmenovatel, tj. rovnice se vynásobí  $\sqrt{1 + y'^2}$

$$(y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2} \sqrt{1 + y'^2} - y'^2 (y + \lambda) = c_1 \sqrt{1 + y'^2}. \quad (4.42)$$

V (4.42) se na levé straně rovnosti upraví odmocniny na

$$(y + \lambda)(1 + y'^2) - y'^2 (y + \lambda) = c_1 \sqrt{1 + y'^2} \quad (4.43)$$

rovnost (4.43) lze dále upravovat. Roznásobením závorek a případným odečtením stejných členů s opačnými znaménky, tj.  $yy'^2$  a  $\lambda y'^2$ , čímž se získá zase o trochu zjednodušený tvar rovnice

$$y + \lambda = c_1 \sqrt{1 + y'^2}, \quad (4.44)$$

z které se následně odstraní odmocniny, tj. rovnici (4.44) umocníme na druhou, z čehož lze získat

$$(y + \lambda)^2 = c_1^2 (1 + y'^2). \quad (4.45)$$

Úpravou (4.45) lze rovnici dále zjednodušit roznásobením pravé strany rovnice a následnou eliminací členů s  $y'$  na jednu stranu. Takto se získá vztah

$$c_1^2 y'^2 = (y + \lambda)^2 - c_1^2 \quad (4.46)$$

kam se přehledně za  $y'$  dosadí podle definice derivace vztah  $dy$  ku  $dx$ .

$$c_1^2 \frac{dy^2}{dx^2} = (y + \lambda)^2 - c_1^2. \quad (4.47)$$



Získaná rovnice (4.47) se dále upravuje tak, aby na jedné straně zůstaly členy s  $x$  a na druhé s  $y$ , tj.

$$\frac{c_1^2}{(y + \lambda)^2 - c_1^2} dy^2 = dx^2 \quad (4.48)$$

a nyní se ještě obě strany rovnosti (4.48) odmocní

$$\frac{c_1}{\sqrt{(y + \lambda)^2 - c_1^2}} dy = dx. \quad (4.49)$$

Rovnici tvaru (4.49) je možné zintegrovat podle jednotlivých proměnných na každé straně

$$\int \frac{c_1}{\sqrt{(y + \lambda)^2 - c_1^2}} dy = \int dx. \quad (4.50)$$

V této části je třeba vyřešit oba integrály rovnosti (4.50), které si však nežadají další úpravu, protože jsou uvedené v tabulce derivací, podle které se oba integrály upraví na

$$c_1 \operatorname{argcosh} \frac{y + \lambda}{c_1} = x + c_2, \quad (4.51)$$

což se dále upraví vydělením rovnice (4.51) konstantou  $c_1$

$$\operatorname{argcosh} \frac{y + \lambda}{c_1} = \frac{x + c_2}{c_1}, \quad (4.52)$$

aby došlo k vyjádření  $y$ , musí se na rovnici (4.52) aplikovat inverzní funkce, kterou je pro  $\operatorname{argcosh}$  funkce  $\cosh$

$$\frac{y + \lambda}{c_1} = \cosh \left( \frac{x + c_2}{c_1} \right) \quad (4.53)$$

z takové rovnice již se  $y$  vyjádří snadno. Je třeba vynásobit (4.53) konstantou  $c_1$  a následně odečíst  $\lambda$

$$y = -\lambda + c_1 \cosh \left( \frac{x + c_2}{c_1} \right) \quad (4.54)$$

□

Vztah (4.54) je funkce, popisující zavěšený řetěz, taková funkce se nazývá *hyperbolický cosinus*. Hyperbolické funkce jsou do jisté míry analogií se známějšími goniometrickými funkcemi. Podobně jak sinus a cosinus definují body jednotkové kružnice, tak hyperbolický sinus a cosinus definují body pravé části rovnoosé hyperboly.

### 4.3 Řešení izoperimetrického problému

Výsledkem formulace této úlohy byl vztah (2.24) tvaru

$$\mathcal{S}(y) = \int_a^b y(x) dx, \quad (4.55)$$

který je třeba vyřešit za podmínky, že délka hledané funkce má konstantní délku  $l$  popsanou vztahem (2.4)

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \quad (4.56)$$

*Řešení:* Před sestavením rovnice (4.10) je třeba výše uvedené funkcionály (4.55) a (4.56) opět sloučit pomocí reálného čísla  $\lambda$  do jednoho pomocného funkcionálu  $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P}(y, y') = \int_a^b y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (4.57)$$

Na funkcionál (4.57) v takovém tvaru, už lze provést přehledně derivaci podle  $y'$ , která je třeba k sestavení rovnice (4.10)

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y'} = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (4.58)$$

z čehož již se sestaví rovnice (4.10) jako

$$y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = c_1. \quad (4.59)$$

S rovností (4.59) se bude dále při úpravě postupovat jako při řešení jakékoli jiné rovnice s odmocninou. Nejprve se odstraní jmenovatel, tj. vynásobíme rovnici  $\sqrt{1 + y'^2}$ .

$$y\sqrt{1 + y'^2} + \lambda\sqrt{1 + y'^2}\sqrt{1 + y'^2} - \lambda y'^2 = c_1\sqrt{1 + y'^2} \quad (4.60)$$

kde se odmocniny dále upraví na

$$y\sqrt{1+y'^2} + \lambda(1+y'^2) - \lambda y'^2 = c_1\sqrt{1+y'^2} \quad (4.61)$$

po roznásobení závorek v (4.61) a případném vyrušení členů s opačnými znaménky se získá tvar rovnosti

$$y\sqrt{1+y'^2} + \lambda = c_1\sqrt{1+y'^2}, \quad (4.62)$$

která se dále zjednoduší opětovným vynásobením  $\sqrt{1+y'^2}$  a tím dojde k vyrušení odmocniny u levého členu rovnosti (4.62) a u konstanty  $c_1$ . Pak má rovnost tvar

$$y + \frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1, \quad (4.63)$$

což je diferenciální rovnice, u které nelze dále pokračovat, jak tomu bylo u předchozích příkladů, za pomoci substituce  $y'$  získané z definice derivace. Protože v tomto konkrétním případě by se nepodařilo eliminovat proměnné  $y$  a  $x$  každé na jednu stranu.

Ale postačí zvolit jinou substituci a to  $y' = \frac{\sin t}{\cos t}$ , která se dosadí do (4.63). A tím se získá

$$y + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}} = c_1. \quad (4.64)$$

Rovnost (4.64) se upraví sečtením členů pod odmocninou na společného jmenovatele a následně se využije goniometrického vztahu, že  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ . Takto zjednodušený vztah má tvar

$$y - c_1 = \lambda \cos t \quad (4.65)$$

z kterého již drobnou úpravou je možno vyjádřit  $y$ .

Aby se získal vztah i pro  $x$  je třeba (4.65) zderivovat podle tabulkových hodnot a pak dosadit zderivovaný tvar do zavedené substituce  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{\cos t}$ . Po separaci  $dx$  lze výraz lehce zintegrovat a tím získat

$$x - c_2 = \lambda \sin t. \quad (4.66)$$

Pro separaci parametru  $t$  ze získaného řešení, je třeba soustavu rovnic (4.65) a (4.66) umocnit na druhou a sečíst pravé a levé strany umocněných vztahů, čímž se obrdží

$$(x - c_2)^2 + (y - c_1)^2 = \lambda^2. \quad (4.67)$$

□

Tento vztah (4.67) je rovnice pro kružnici o středu  $S[c_1, c_2]$  a poloměru  $\lambda$ , které by se numericky dopočítaly z počátečních podmínek.

Čímž se vlastně potvrdila intuitivně známá skutečnost. Má-li zadaná délka funkce ohraničit maximální plochu, bude mít tvar kruhu.

#### 4.4 Řešení úlohy o rotačním tělesu

Výsledkem formulace této úlohy byl vztah (2.25), který má tvar

$$\mathcal{S}(y, y') = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (4.68)$$

kde v (4.68) je  $2\pi$  konstanta, tak ji necháme před integrálem, protože nemá zásadní vliv na řešení.

*Řešení:* Ze vztahu (4.68) se provede nejprve derivace, která je potřebná pro sestavení rovnice (4.10), tj.

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (4.69)$$

pomocí (4.69) již lze sestavit rovnici (4.10)

$$y\sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c_1 \quad (4.70)$$

v (4.70) se následně odstraní jmenovatel rovnice

$$y\sqrt{1 + y'^2}\sqrt{1 + y'^2} - yy'^2 = c_1\sqrt{1 + y'^2} \quad (4.71)$$

pak se v rovnosti (4.71) upraví odmocniny na

$$y(1 + y'^2) - yy'^2 = c_1\sqrt{1 + y'^2}. \quad (4.72)$$

Na levé straně vztahu (4.72) se roznásobí závorka, čímž se člen  $yy'^2$  vyruší. Takto zjednodušená rovnice má tvar

$$y = c_1\sqrt{1 + y'^2}. \quad (4.73)$$

Umocněním vztahu (4.73) na druhou se odstraní zbývající odmocnina

$$y^2 = c_1^2(1 + y'^2), \quad (4.74)$$

kdy po roznásobení závorky v (4.74) se dá  $y'$  vyjádřit jako

$$c_1^2 y'^2 = y^2 - c_1^2. \quad (4.75)$$

Za  $y'$  dosadíme do (4.75) podle definice derivace vztah  $dy$  ku  $dx$

$$c_1^2 \frac{dy^2}{dx^2} = y^2 - c_1^2. \quad (4.76)$$

Dále v (4.76) separujeme proměnné, tj. vynásobíme rovnost  $dx^2$  a vydělíme pravou stranou

$$\frac{c_1^2 dy^2}{y^2 - c_1^2} = dx^2, \quad (4.77)$$

rovnost (4.77) odmocníme

$$\frac{c_1 dy}{\sqrt{y^2 - c_1^2}} = dx. \quad (4.78)$$

Nyní se zintegrují obě strany (4.78) podle jednotlivých proměnných

$$\int \frac{c_1 dy}{\sqrt{y^2 - c_1^2}} = \int dx, \quad (4.79)$$

z integrálu (4.79) na levé straně již pouze vytknem konstantu  $c_1$

$$c_1 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c_1^2}} = \int dx. \quad (4.80)$$

Oba integrály ze vztahu (4.80) jsou uvedeny v tabulce pro derivaci, a tedy můžeme ihned psát

$$c_1 \operatorname{argcosh} \frac{y}{c_1} = x + c_2. \quad (4.81)$$

V takovém případě opět vystačí pouze jedna integrační konstanta. Může se však klidně napsat i druhá, ale stejně by se následně sloučily jako rozdíl do jedné.

Dále se rovnost (4.81) vydělí konstantou  $c_1$

$$\operatorname{argcosh} \frac{y}{c_1} = \frac{x + c_2}{c_1}. \quad (4.82)$$

Nyní je třeba (4.82) upravit použitím inverzní funkce k  $\operatorname{argcosh}$ , tj.  $\cosh$ , aby došlo k vyjádření  $y$

$$\frac{y}{c_1} = \cosh \frac{x + c_2}{c_1}. \quad (4.83)$$

Z (4.83) již bez zaváhání vyjádříme  $y$

$$y = c_1 \cosh \frac{x + c_2}{c_1}. \quad (4.84)$$

□

Výsledek (4.84) je výše zmíněný hyperbolický cosinus. Z čehož vyplývá, že hledaná funkce pro minimální povrch rotačního tělesa, bude mít podobný tvar, jako zavěšený řetěz.

## Závěr

Tato práce měla za cíl přestavit čtenáři základní myšlenky variačního počtu, zejména na typických problémech, kterými se tato problematika zabývá.

Při řešení jednotlivých úloh bylo směřováno k nalezení obecné funkce, která je výsledkem funkcionalů sestavených v první části práce.

Pro úlohu, kde se zaměří pozornost při pohybu hmotného bodu na minimální čas, se dojde k zjištění, že pohyb musí probíhat po cykloidě. Pokud však bude úkolem problému ohraničit maximální plochu pomocí zadané délky funkce, bude mít plocha tvar kružnice. V neposlední řadě, žádá-li se minimální potenciální energie zavěšeného řetězu, případně minimální povrch pláště rotačního tělesa, budou tyto funkce popsány hyperbolickým cosinem. Takové výsledky se shodují se všeobecné známými poznatky.

V této práci byl čtenář seznámen pouze se základními typy funkcionalů a problémů. Pokud by čtenář měl zájem o další rozšíření této problematiky, lze příklady různými způsoby modifikovat. Kupříkladu namísto pevně zvolených koncových bodů, mohou být volné koncové body, které jsou zadané přímkou, kde se mohou nacházet.

Cílem práce však bylo představit základní myšlenky absolventovi střední školy. Rozšíření popsané v této práci je vhodné pro získání základní intuitivní představy a motivaci k dalšímu studiu této problematiky.

## Použité zdroje

- [1] DRÁBEK, Pavel a Alois KUFNER. *Úvod do funkcionální analýzy*. 1. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 1993, 114 s. ISBN 80-7082-124-8.
- [2] *Derivace funkcí více proměnných* [online]. [cit. 2015-05-04]. Dostupné z:   
< <http://math.feld.cvut.cz/tiser/web5.pdf> >
- [3] DŘÍMALOVÁ, Iva. *Variční počet a jeho aplikace*. Brno, 2013. Dostupné z:   
< [http://is.muni.cz/th/324318/pri\\_fm/plnyTEXTprace.pdf](http://is.muni.cz/th/324318/pri_fm/plnyTEXTprace.pdf) >. Diplomová práce. Masarykova univerzita. Vedoucí práce Prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc.
- [4] ELSGOLC, L.E. a Tomáš GÁL. *Variční počet*. 1. vyd. Praha SNTL: Státní nakladatelství technické literatury, 1965, 144 s.
- [5] *Fyzikální a geometrické úlohy variačního typu* [online]. [cit. 2015-05-04]. Dostupné z:   
< <http://www.physics.muni.cz/janam/download/Variacni-pocet-F4260.pdf> >
- [6] GIAQUINTA, Mariano. David Hilbert a variační počet. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. 2001, 46(3). Dostupné z:   
< <http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/141084/PokrokyMFA46-2001-34.pdf> >
- [7] GURKA, Petr. *Monotonie, lokální a globální extrémny funkce* [online]. 2011 [cit. 2015-05-04]. Dostupné z:   
< <http://petrg.wz.cz/czu/downloads/vyuka/AF/AF03.pdf> >
- [8] HÖSCHL, Cyril. *Historie variačního počtu* [online]. [cit. 2015-05-04]. Dostupné z:   
< <http://mechanika.euweb.cz/files/HistorieVariacnihoPoctu.html> >
- [9] KRUPKOVÁ, Olga a Martin SWACZYNA. *Variční počet* [online]. 2006 [cit. 2015-05-04]. Dostupné z:   
< [http://www1.osu.cz/rossi/UcebTextVarPoc\(final\)\(barev\).pdf](http://www1.osu.cz/rossi/UcebTextVarPoc(final)(barev).pdf) >



- [10] KUREŠ, Miroslav. *Variační počet*. Vyd. 1. Brno: PC-DIR Real, 2000, 65 s. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-214-1790-0.
- [11] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky: stručná historie královny věd*. 1. vyd. Příbram: Pistorius, Olšanská, 2008, 334 s. ISBN 978-80-87053-16-4.
- [12] *Matematika v 16. a 17. století: seminář Historie matematiky III : Jevíčko, 18.8.-21.8.1997*. 1. vyd. Editor Jindřich Bečvář, Eduard Fuchs. Praha: Prometheus, 1999, 321 s. Dějiny matematiky (Prometheus), sv. 12. ISBN 8071961507.
- [13] *Matematika v 19. století: sborník přednášek z letních škol : historie matematiky*. 1. vyd. Editor Eduard Fuchs, Jindřich Bečvář. Praha: Prometheus, 1996, 143 s. Dějiny matematiky (Prometheus). ISBN 80-7196-019-5.
- [14] *Variační počet* [online]. [cit. 2015-05-04]. Dostupné z:  
< [http : //matematika.cuni.cz/dl/analyza/38 - var/lekce38 - var - pmin.pdf](http://matematika.cuni.cz/dl/analyza/38-var/lekce38-var-pmin.pdf) >
- [15] VOLTERRA, Vitto. Variační počet, jeho vývoj, jeho pokroky a jeho úloha v matematické fyzice. *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*. 1933, 62(4-5). Dostupné z:  
< [http : //dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/123904/CasPestMat-Fys062 - 1933 - 4<sub>1</sub>.pdf](http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/123904/CasPestMat-Fys062-1933-4_1.pdf) >